АКАДЕМИЯ НАУК СССР
ИНСТИТУТ НАУЧНОЙ ИНФОРМАЦИИ

РЕФЕРАТИВНЫЙ ЖУРНАЛ

МАТЕМАТИКА

III

ТЕОРИЯ ВЕРОЯТНОСТЕЙ. ЧИСЛЕННЫЕ МЕТОДЫ. ВЫЧИСЛИТЕЛЬНЫЕ МАШИНЫ

РЕФЕРАТЫ

10В1—10В367

*

U. I. C. C.
AUG 20 1974
LIBRARY

№ 10 1961
ПРОИЗВОДСТВЕННО-ИЗДАТЕЛЬСКИЙ КОМБИНАТ ВИНИТИ
МОСКВА

РЕФЕРАТИВНЫЙ ЖУРНАЛ
МАТЕМАТИКА

ГЛАВНЫЙ РЕДАКТОР доктор физ.-матем. наук *Р. В. Гамкрелидзе*

ЧЛЕНЫ РЕДКОЛЛЕГИИ: академик *П. С. Александров*, академик *А. Н. Колмогоров*, профессор *Л. Д. Кудрявцев*, профессор *В. И. Левин*, член-корреспондент АН СССР *Ю. В. Линник*, профессор *А. И. Маркушевич*, профессор *М. А. Наймарк*, профессор *В. В. Немыцкий*, профессор *С. М. Никольский*, академик *П. С. Новиков*, профессор *Д. Ю. Панов*, профессор *К. А. Рыбников*, член-корреспондент АН СССР *Н. В. Смирнов*, профессор *С. П. Фиников*

УЧЕНЫЙ СЕКРЕТАРЬ канд. физ.-матем. наук *Н. М. Остиану*

СОДЕРЖАНИЕ

Теория вероятностей и математическая статистика	
Теория вероятностей	10В1
Математическая статистика	10В52
Теория игр, исследование операций и математическая экономика	10В98
Применение теоретико-вероятностных и статистических методов	10В149
Численные и графические методы	10В220
Таблицы	10В320
Вычислительные машины и математические приборы	10В349
Применение вычислительных машин	—
Авторский указатель	

Адрес редакции: Москва, А-219, Балтийская улица, 14

Технический редактор *Н. Н. Гомза*

Подписано в печать 12/X-1961 г. Формат бумаги 84×108¹/₁₆ Тираж 1026

Печ. л. 4 Усл. печ. л. 6,56 Уч.-изд. л. 10,88 Заказ 3484

Производственно-издательский комбинат ВИНИТИ, г. Москва, Люберцы, Октябрьский пр., 403

РЕФЕРАТИВНЫЙ ЖУРНАЛ

МАТЕМАТИКА

III. ТЕОРИЯ ВЕРОЯТНОСТЕЙ. ЧИСЛЕННЫЕ МЕТОДЫ. ВЫЧИСЛИТЕЛЬНЫЕ МАШИНЫ

Рефераты 10В1—10В367 № 10 Октябрь 1961 г.

584 пс

ТЕОРИЯ ВЕРОЯТНОСТЕЙ И МАТЕМАТИЧЕСКАЯ СТАТИСТИКА

ТЕОРИЯ ВЕРОЯТНОСТЕЙ

Редактор *О. В. Сарманов*

10 В1. Вероятность, статистика и теория игр. Schwartz Leonard S., Hilton Alice Mary. Probability, statistics and the theory of games. «Electro-Technol.», 1961, **67**, № 3, 101—124 (англ.)

10 В2. Об обобщении метода пари Эмиля Бореля. Masse Pierre. Sur une generalisation de la methode du paire d'Emile Borel. «C. r. Acad. sci.», 1958, **247**, № 21, 1828—1830 (франц.)

10 В3. Вероятность на немодулярной структуре (квантовая теория вероятностей). Bodiou G. Probabilité sür une treillis non modulaire (Calcul quantique des probabilités). «Publs. Inst. statist. Univ. Paris», 1957, **6**, № 1, 11—25 (франц.)

Исходя из нужд квантовой теории, автор предлагает свою систему аксиом и определений теории вероятностей (здесь приведены лишь главнейшие аксиомы). Частично упорядоченное множество T называется ортогональной структурой, если в нем определена операция взятия дополнительного элемента $A \to A'$, причем: а) множество T содержит нулевой элемент $\varnothing$ и наибольший элемент u; б) $[A']' = A$; в) из $A \leqslant B$ следует $A' \geqslant B'$; г) любое подмножество элементов T обладает нижней и верхней гранями. Нижняя грань A и B обозначается символом $A \cap B$, а верхняя $A \cup B$. Неотрицательная монотонная функция $P(A)$, $A \in T$ называется вероятностным распределением, если $P(u) = 1$ и если $P(A)$ σ-аддитивна (т. е. для любого не более чем счетного набора элементов A_i таких, что $A_i \subseteq A_j'$ при $i \neq j$, имеет место равенство $P(\bigcup A_i) = \sum P(A_i)$). Вообще говоря, из равенства $A \cap B = \varnothing$ не вытекает равенство $P(A) + P(B) = P(A \cup B)$. Постулируется также, что множество элементов A таких, что $P(A) = 1$, замкнуто относительно операции $\cap$. Это множество, называется достоверной структурой, отвечающей распределению P. Предполагается, что каждый элемент из T, кроме $\varnothing$, принадлежит некоторой достоверной структуре. Каждая достоверная структура содержит минимальный элемент $z(P)$, являющийся атомом, причем постулируется взаимная однозначность отображения $P \to z(P)$ пространства распределений P в совокупность элементов $z(P)$. Если $z = z(P)$, то полагают $P(A, z) = P(A)$. Естественным образом вводится понятие условного распределения $P(B\,A, z)$. Предполагается, наконец, существование такой комплексной величины $V(A \cdot x \mid y)$, совпадающее по модулю с $\sqrt{P(x \mid A, y)\,P(A, y)}$, где x и y — атомы, и $y \not\leqslant A'$, и равной нулю, если $y \leqslant A'$, и обладающей свойствами: а) $V(A \cup B \cdot x \mid y) = V(A \cdot x \mid y) + V(B \cdot x \mid y)$, если $A \leqslant B'$; б) $V(y \cdot x \mid z) = V(u \cdot x \mid y) \cdot V(u \cdot y \mid z)$; в) $V(u \cdot x \mid y) = \bar{V}(u \cdot y \mid x)$. С помощью этой системы аксиом строится теория случайных величин на T.

М. Г. Шур

10 В4. Один пример из теории вероятностей. Cecconi Jaures. Um exemplo na teoria da probabilidade. «Anuário Soc. paran. mat.», 1959, **2**, 33—36 (порт.)

Пусть X — счетное множество, $\sigma(X)$ — множество всех подмножеств X. Построена функция на множестве $\sigma(X)$, обладающая всеми свойствами вероятностей меры, кроме полной аддитивности. Р. Ф. Матвеев

10 В5. Замечания о случайных множествах. Lévy Paul. Remarques sur certains ensembles aléatoires. «J. math. pures et appl.», 1960, **39**, № 2, 97—118 (франц.)

Приведены доказательства утверждений, сформулированных ранее в кратком сообщении автора (РЖМат, 1960, 10618). М. И. Ядренко

10 В6. Об обобщении условного среднего Вьянелли. Ferreri C. Sulla generalizzazione delle medie condizionate simultanee del Vianelli. «Statistica», 1958, **18**, № 4, 693—707 (итал.)

10 В7. Замечания к проблеме максимальной корреляции. Csáki Péter, Fischer János. Contributions to the problem of maximal correlation. «Magyar tud. akad. Mat. kutató int. közl.», 1960, **5**, № 3, 325—337 (англ.; рез. русск.)

Отмечается, что максимальный коэффициент корреляции является, со многих точек зрения, наилучшей мерой силы стохастической связи. Рассматривается ряд свойств собственных функций и собственных чисел операторов, определяющих корреляционную зависимость между двумя случайными величинами. Некоторые из этих свойств известны (например, собственные функции находятся в линейной регрессии). Интересна теорема 2: Для линейно коррелированных нормированных случайных переменных ξ и η эквивалентны следующие утверждения: 1) ξ и η имеют постоянную условную дисперсию (корреляция гомоскедастична): 2) $\xi^2 - 1$ и $\eta^2 - 1$ образуют пару собственных функций, принадлежащих квадрату первого

собственного числа (для нормальной корреляции теорема очевидна). Приводится ряд интересных примеров.

О. В. Сарманов, В. К. Захаров

10 В8. Использование центральной предельной теоремы для интерполирования в таблицах функций распределения. Salton Gerard. The use of the central limit theorem for interpolating in tables of probability distribution functions. «Math. Tables and Other Aids Comput.», 1959, **13**, № 67, 213—216 (англ.)

Предлагается заменять интерполирование в таблицах функций распределения и их плотностей для малых значений случайных величин интерполированием нормального распределения на основании центральной предельной теоремы. Иллюстрируется на биномиальном распределении. Приводится расчет, показывающий преимущество предлагаемого метода перед методом обычной интерполяции.

Э. О. Рапопорт

10 В9. О распределении корней случайного алгебраического уравнения. Gaede Karl—Walter. Zur Verteilung der Wurzeln zufälliger algebraischer Gleichungen. «Math. Nachr.», 1960, **21**, № 1-2, 81—107 (нем.)

В большинстве случаев найдены достаточно очевидные результаты в самой общей форме.

10 В10. Распределение действительных корней алгебраических уравнений со случайными коэффициентами. Gaede K. W. Verteilung reeller Wurzeln von algebraischen Gleichungen mit Zufallskoeffizienten. «Z. angew. Math und Mech.», 1959, **39**, № 9-11, 368 (нем.)

10 В11. Разложение на компоненты смеси дискретных распределений вероятностей. Medgyessy Pál. Diszkrét valoszínűség — eloszlások keverékének felbontása összetevőire. «A magyar tud. akad. Alkalm. mat. int. közl.», 1954 (1955), **3**, № 1-2, 139—153 (венг.; рез. русск., англ.)

Если дискретная случайная величина ξ имеет распределение $P\{\xi = k\} = f_k$, где а) $f_l = \sum_{k=1}^{N} A_k \binom{M_k}{l} p_k^l \times (1-p_k)^{M_k - l}$ или в) $f_l = \sum_{k=1}^{N} A_k e^{-\lambda_k} \frac{\lambda_k^l}{l!}$ $(l = 0, 1, 2, \ldots;$ $A_k > 0$, $\sum A_k = 1$, $M_k > 0$, $0 < p_k < 1$, $0 < \lambda_k)$, то распределение называется смесью биномиальных, соответственно пуассоновских распределений с весами A_k. Автор предлагает метод для определения неизвестных параметров A_k, M_k, p_k (соответственно A_k, λ_k) при известных f_k. Доказывается, что $F_l(\mu) = \sum A_k \binom{M_k}{l} \times (\mu p_k)^l (1 - \mu p k)^{M_k - l}$ представляется в виде

$$F_l(\mu) = \mu^l \sum_{\rho=l}^{\max M_k} \binom{\rho}{l} (1-\mu)^{\rho - l} f_\rho.$$

С помощью $F_l(\mu_l)$ $(\mu_1 < \mu_2 < \ldots)$ определяются компоненты смеси. Для пуассоновских распределений доказывается подобная теорема. Имеются примеры.

М. Арато

10 В12. Одно замечание о смешанной задаче Бейеса и Бернулли. Ян Цзун-пань. «Шусюэ сюэбао, Acta math. sinica», 1959, **9**, № 3, 330—332 (кит.)

Находится производящая функция моментов распределения

$$p_m = \frac{\int_0^1 x^{n+m}(1-x)^{N+M-n-m}\,dx}{\int_0^1 x^n (1-x)^{N-m}\,dx} C_M^m, \quad m = 1, \ldots, M,$$

где n и N — фиксированные целые. В случае, когда $N \to \infty$ и $n/N \to p_0$, автор показал, что

$$\lim_{N\to\infty} p_m = C_M^m p_0^m (1-p_0)^{M-m}.$$

Wang shou-jen

10 В13. Свертка распределений типа Пойа. Karlin Samuel, Proschan Frank. Pólya type distributions of convolutions. «Ann. Math. Statistics», 1960, **31**, № 3, 721—736 (англ.)

Говорят, что функция $f(x, y)$ от двух вещественных переменных, заданная на одномерных множествах X и Y соответственно, абсолютно положительная порядка k, если для всех $x_1 < x_2 < \ldots < x_m$, $y_1 < y_2 < \ldots < y_m$ $(x_i \in X, y_i \in Y)$ и всех $1 \leqslant m \leqslant k$

$$f\begin{pmatrix} x_1, x_2, \ldots, x_m \\ y_1, y_2, \ldots, y_m \end{pmatrix} = \begin{vmatrix} f(x_1, y_1) & f(x_1, y_2) & \ldots & f(x_1, y_m) \\ f(x_2, y_1) & f(x_2, y_2) & \ldots & f(x_2, y_m) \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ f(x_m, y_1) & f(x_m, y_2) & \ldots & f(x_m, y_m) \end{vmatrix} \geqslant 0.$$

Если такая функция есть плотность вероятностей по одной из переменных, для каждого фиксированного значения другой переменной, то ее называют функцией типа Пойа порядка k (PT_k). Если функция PT_k может быть записана как функция от разности переменных, то ее называют частотной плотностью Пойа порядка k (PF_k). Доказывается, что если $f_1, f_2, \ldots, f_n$ — плотность распределений случайных величин, причем каждая f_i является PF_k, то их композиция $g(u, x) = f_1 * f_2 * \ldots * f_n$ тоже является PF_k. Изучаются свойства $g(n, x)$.

Э. О. Рапопорт

10 В14. О распределении произведения двух F-распределенных величин. Akaide Hirotugu. On the distribution of the product of two F-distributed variables. «Ann. Inst. Statist. Math.», 1956, **8**, № 1, 53—54 (англ.)

10 В15. Локальная предельная теорема для плотностей в случае сходимости к негауссову закону. Емельянов Г. В. «Вестн. Ленингр. ун-та», 1961, № 1, 55—60 (рез. англ.)

Рассматриваются независимые случайные величины ξ_k, «почти одинаково» распределенные (в смысле асимптотики соответствующих функций распределения при $x \to \pm\infty$). Предполагается, что распределения нормированных сумм $\eta_n = B_n^{-1}(\xi_1 + \ldots + \xi_n)$ сходятся к симметричному устойчивому закону $G(x)$ с показателем α, $0 < \alpha < 2$. Доказано, что если по некоторой подпоследовательности k_ν существуют плотности и их максимумы $\mu_k = \max_x p_{\xi_k}(x)$ удовлетворяют соотношению

$$(\ln B_n)^{-1} \sum_{k_\nu \leqslant n} \mu_{k_\nu}^{-2} \to \infty,$$

то равномерно по x плотности $p_{\eta_n}(x)$ сходятся к $G'(x)$. Рассуждения автора, по-видимому, заметно упрощаются, если использовать следующее элементарное неравенство: пусть распределение с характеристической функцией $f(t)$ сосредоточено на отрезке $[-L, L]$ и имеет плотность, не превосходящую μ; тогда при $|t| \geqslant \pi L^{-1}$ $|f(t)| \leqslant \exp\{-c(2\mu L)^{-2}\}$, где c — абсолютная константа.

Ю. В. Прохоров

10 В16. Обобщение локальной центральной предельной теоремы. Gyires Béla. A centrális határeloszlástétel lokális alakjának általánosításáról. «Magyar tud. akad. Mat. és fiz. tud. oszt. közl.», 1960, **10**, № 4, 469—479 (венг.)

Пусть $\xi_1, \xi_2, \ldots$ — не зависимые друг от друга случайные величины, принимающие только целые значения, одинаково распределенные, с нулевым математическим ожиданием и со стандартным отклонением $\sigma > 0$, т. е. пусть

$$P(\xi_\nu = k) = A_k \geqslant 0 \quad (k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots;\ \nu = 1, 2, \ldots), \quad (1)$$

где

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} A_k = 1, \quad \sum_{k=-\infty}^{\infty} kA_k = 0, \quad \sum_{k=-\infty}^{\infty} k^2 A_k = \sigma^2 > 0. \quad (2)$$

Если еще

$$P(\xi_1 + \ldots + \xi_n = k) = A_k^{(n)}, \quad (3)$$

$$B_n = \sigma\sqrt{n}, \ z = \frac{k}{B_n}, \quad (4)$$

то, согласно локальной центральной предельной теореме (Гнеденко Б. В. и Колмогоров А. Н. Предельные распределения для сумм независимых случайных величин. М. — Л, 1949), для того, чтобы в интервале $(-\infty < k < \infty)$ равномерно по k выполнялось соотношение

$$B_n A_k^{(n)} - \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{z^2}{2}} \to 0, \ n \to \infty,$$

необходимо и достаточно, чтобы при различных значениях ξ_ν их наибольший общий делитель равнялся единице. Пусть из чисел (1) образована L-матрица

$$A = \begin{pmatrix} \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots \\ \cdot & A_0 & A_1 & A_2 & A_3 & A_4 & \cdot \\ \cdot & A_{-1} & A_0 & A_1 & A_2 & A_3 & \cdot \\ \cdot & A_{-2} & A_{-1} & A_0 & A_1 & A_2 & \cdot \\ \cdot & A_{-3} & A_{-2} & A_{-1} & A_0 & A_1 & \cdot \\ \cdot & A_{-4} & A_{-3} & A_{-2} & A_{-1} & A_0 & \cdot \\ \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots \end{pmatrix} =$$

$$= L(\ldots, A_{-2}, A_{-1}, A_0, A_1, A_2, \ldots), \quad (5)$$

которая на основании (1) и (2) является стохастической. Из (3) следует, что

$$A_k^{(n)} = \sum_{\nu=-\infty}^{\infty} A_\nu^{(n-1)} A_{k-\nu} \quad (n = 2, 3, \ldots;\ A_\nu^{(1)} = A_\nu). \quad (6)$$

Поэтому на основании правила умножения матриц

$$A^n = L(\ldots, A_{-2}^{(n)}, A_{-1}^{(n)}, A_0^{(n)}, A_1^{(n)}, A_2^{(n)}, \ldots). \quad (7)$$

Тем самым центральная локальная теорема о предельном распределении позволяет судить и об асимптотическом поведении матрицы (7). Пусть

$$A_k = \begin{pmatrix} a_{11}^{(k)} \ldots a_{1p}^{(k)} \\ \ldots\ldots \\ a_{p_1}^{(k)} \ldots a_{pp}^{(k)} \end{pmatrix} \quad (k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots),$$

причем

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} k \sum_{l=1}^{p} a_{jl}^{(k)} = 0 \quad (j = 1, \ldots, p)$$

и

$$S = \sum_{k=-\infty}^{\infty} A_k > 0.$$

Доказывается следующая теорема. В интервале $(-\infty < k < \infty)$ равномерно по k выполняется соотношение

$$B_n A_k^{(n)} - \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{z^2}{2}} P \to 0, \ n \to \infty,$$

если хотя бы при одном значении j ряд

$$\ldots, a_{jl}^{(-2)}, a_{jl}^{(-1)}, a_{jl}^{(0)}, a_{jl}^{(1)}, a_{jl}^{(2)}, \ldots \quad (l = 1, \ldots, p)$$

обладает тем свойством, что наибольший общий делитель разностей верхних индексов у элементов, отличных от нуля, равен единице, и если

$$\lim_{n\to\infty} S^n = P.$$

А. Н. Хованский

10 В17. Предельные распределения при простом случайном выборе из конечной совокупности. Hájek Jaroslav. Limiting distributions in simple random sampling from a finite population. «Magyar tud. akad. Mat. kutató int. közl.», 1960, 5, № 3, 361—374 (англ., рез. русск.)

Пусть в результате ν-го случайного эксперимента ($\nu = 1, 2, \ldots$) получается подмножество s_{n_ν} множества $S_\nu = (1, 2, \ldots, N_\nu)$ с вероятностью

$$P\{s_{n_\nu}\} = \frac{n_\nu!\,(N_\nu - n_\nu)!}{N_\nu!}$$

(n_ν — число элементов s_{n_ν}). Положим $\xi_\nu = \sum_{i \in s_{n_\nu}} y_{\nu i}$, где

$$y_{\nu 1}, y_{\nu 2}, \ldots, y_{\nu N_\nu}$$

— заданное множество действительных чисел, $\overline{Y}_\nu = \frac{\sum_{i=1}^{N_\nu} y_{\nu i}}{N_\nu}$. Ставится вопрос о предельном поведении ξ_ν при $\nu \to \infty$. Доказывается, что при $n_\nu \to \infty$ и $N_\nu - n_\nu \to \infty$ последовательность $\xi_\nu - M\xi_\nu$ имеет такое же предельное поведение, как и последовательность $\sum_{i=1}^{N_\nu} \zeta_{\nu i}$, где $\zeta_{\nu i}$ — независимые случайные величины, причем

$$\zeta_{\nu i} = \begin{cases} y_{\nu i} - \overline{Y}_\nu & \text{с вер. } \dfrac{n_\nu}{N_\nu}, \\ 0 & \text{с вер. } 1 - \dfrac{n_\nu}{N_\nu}, \end{cases}$$

где

$$\overline{Y}_\nu = \frac{1}{N_\nu} \sum_{i=1}^{N_\nu} y_{\nu i}.$$

Получены необходимые и достаточные условия для сходимости ξ_ν к безгранично делимым законам. В частности, для того чтобы (при $n_\nu \to \infty$ и $N_\nu - n_\nu \to \infty$) ξ_ν была асимптотически нормальной с параметрами $(M\xi_\nu, D\xi_\nu)$, необходимо и достаточно, чтобы

$$\lim_{\nu\to\infty} \frac{\sum_{i \in s_{\nu\tau}} (y_{\nu i} - \overline{Y}_\nu)^2}{\sum_{i=1}^{N_\nu} (y_{\nu i} - \overline{Y}_\nu)^2} = 0,$$

$s_{\nu\tau}$ — подмножество множества $s_\nu = (1, \ldots, N_\nu)$ такое, что если $i \in s_{\nu\tau}$, то $|y_{\nu i} - \overline{Y}_\nu| > \tau\sqrt{D\xi_\nu}$, τ — любое положительное число.

В. Н. Тутубалин

10 В18. Вероятности в последовательности повторяющихся почти независимых опытов. Kotzig Anton. Pravdepodobnosti v postupnosti opakovaných skoro nezá-

vislých pokusov. «Mat.-fyz. časop.», 1959, 9, № 4, 191—210 (словацк.; рез. русск., нем.)

Пусть $E_1, E_2, \ldots, E_k, \ldots$ — последовательность случайных опытов. Пусть каждый из опытов имеет n различных несовместных исходов $v_1, v_2, \ldots, v_n$. Пусть A_r^i — событие, состоящее в том, что исходом i-го опыта является исход v_r; пусть, далее, $P(\mathfrak{A}_k = a_1, \ldots, a_k)$ означает вероятность того события, что исходами первого, второго, ... и k-го опытов будут исходы $v_{a_1}, \ldots, v_{a_k}$; последовательность таких опытов автор называет последовательностью «почти независимых опытов» в том случае, когда для каждого натурального k и для каждой перестановки $i_1, \ldots, i_k$ чисел $1, \ldots, k$ имеет место соотношение

$$P(\mathfrak{A}_k = a_1, \ldots, a_k) = P(\mathfrak{A}_k = a_{i_1}, \ldots, a_{i_k}).$$

Пусть, далее, $P[\xi_1, \ldots, \xi_n]$ (ξ_i — неотрицательные целые числа) означает вероятность того, что при первых ξ опытах ($\xi = \xi_1 + \ldots + \xi_n$) встретится исход v_i точно ξ_i раз ($i = 1, \ldots, n$). Пусть $s_1, \ldots, s_n$ — неотрицательные целые числа и пусть

$$M_\xi(s_1, \ldots, s_n) = \sum_{\xi_1, \ldots, \xi_n} P(\xi_1, \ldots, \xi_n) \left(\frac{\xi_1}{\xi}\right)^{s_1} \ldots \left(\frac{\xi_n}{\xi}\right)^{s_n}$$

(где $\xi_1, \ldots, \xi_n$ пробегают все целые неотрицательные числа, удовлетворяющие условию $\xi_1 + \ldots + \xi_n = \xi$) — момент случайного вектора $\left(\frac{\xi_1}{\xi}, \ldots, \frac{\xi_n}{\xi}\right)$ порядка $(s_1, \ldots, s_n)$. Доказывается, что

$$\lim_{\xi \to \infty} M_\xi(s_1, \ldots, s_n) = \frac{s_1! \ldots s_n!}{\left(\sum_{i=1}^n s_i\right)!} P[s_1, \ldots, s_n];$$

затем доказывается, что существует одна и только одна n-мерная функция распределения $F(x_1, \ldots, x_n)$ для n-мерного вектора $(\overline{\xi_1}, \ldots, \overline{\xi_n})$, ограниченного условием, $0 \leqslant \overline{\xi_i} \leqslant 1$ ($1 \leqslant i \leqslant n$), и имеющего в качестве моментов порядков $s_1, \ldots, s_n$ выражения

$$\frac{s_1! \ldots s_n!}{\left(\sum_{i=1}^n s_i\right)!} P[s_1, \ldots, s_n].$$

Справедливо также обратное утверждение: для любой n-мерной функции распределения $F(x_1, \ldots, x_n)$ случайного вектора $(\overline{\xi_1}, \ldots, \overline{\xi_n})$, ограниченного условием $0 \leqslant \overline{\xi_i} \leqslant 1$ ($1 \leqslant i \leqslant n$), можно указать последовательность почти независимых опытов такую, что для всех групп неотрицательных чисел $s_1, \ldots, s_n$ выражение $\left(s_1! \ldots s_n! \Big/ \left(\sum_{i=1}^n s_i\right)!\right) P[s_1, \ldots, s_n]$ является моментом порядка $(s_1, \ldots, s_n)$ приведенной n-мерной функции распределения. На нескольких примерах последовательностей случайных опытов показано, что существуют последовательности почти независимых опытов, которые не являются в то же время последовательностями независимых опытов. J. Seitz

10 В19. Некоторые замечания об устойчивых процессах с независимыми приращениями. Kac M. Some remarks on stable processes with independent increments. «Probability and statistics. Stockholm, Almqvist and Wiksell; New York, John Wiley and Sons», 1959, 130—138 (англ.)

Рассматриваются вопросы, связанные с определением вероятности

$$P\{-A < x(\tau) < B,\ 0 \leqslant \tau \leqslant t\}$$

для случайного процесса $x(\tau)$ с независимыми приращениями ($x(0) = 0$), имеющим устойчивый закон распределения с характеристическим показателем α. Показывается, что если $X_1, \ldots, X_n, \ldots$ есть последовательность независимых величин с общей плотностью

$$p(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-|\xi|^\alpha} e^{ix\xi}\, d\xi,$$

то

$$P\{-An^{1/\alpha} < X_1 + \ldots X_k < Bn^{1/\alpha},\ k = 1, 2, \ldots n\}$$

выражается через характеристические числа $\lambda_j(T)$ интегрального оператора с ядром $\rho^{(x-y)}$ на отрезке $[-T, T]$ при надлежаще выбранном T,

$$\lambda_j(T) = 1 - \frac{\mu_j}{T^\alpha} + O\left(\frac{1}{T^\alpha}\right).$$

Полученная асимптотика $\lambda_j(T)$ позволяет выписать некоторое выражение для предела

$$\lim_{n \to \infty} P\{-An^{1/\alpha} < X_1 + \ldots + X_k < Bn^{1/\alpha},\ k = 1, \ldots, n\}.$$

Ю. А. Розанов

10 В20. О комбинаторных методах в теории флуктуаций. Feller William. On combinatorial methods in fluctuation theory, «Probability and statistics. Stockholm, Almqvist and Wiksell; New York, John Wiley and Sons», 1959, 75—91 (англ.)

Пусть $\mathfrak{S}$ — пространство $n!$ равновероятных элементарных событий, каждое из которых представляет собой перестановку чисел $1, \ldots, n$; $c_1, \ldots, c_n$ — произвольные вещественные числа. Каждому элементарному событию — перестановке $(i_1, i_2, \ldots, i_n)$ поставим в соответствие вектор $(c_{i_1}, c_{i_2}, \ldots, c_{i_n})$ и определим суммы:

$$s_0 = 0,\ s_1 = c_{i_1},\ s_2 = c_{i_1} + c_{i_2}, \ldots, s_n = c_{i_1} + \ldots + c_{i_n}.$$

Целозначная случайная величина M, $0 \leqslant M \leqslant n$ называется индексом первого максимума, если $s_M > s_i$ для всех $M > i$ и $s_M \geqslant s_j$ для всех $M \leqslant j$. Аналогично определяются индексы последнего максимума M^+, а также индексы первого N и последнего N^* минимумов. Обозначим через $p(q)$ и $p^*(q^*)$ числа строго положительных (отрицательных) и неотрицательных (неположительных) членов в последовательности $s_1, \ldots, s_n$.

Теорема 1.

$$P\{M = j\} = P\{p = j\};\quad P\{M^* = j\} = P\{p^* = j\};$$
$$P\{N = j\} = P\{q = j\};\quad P\{N^* = j\} = P\{q^+ = j\}.$$

Это чисто комбинаторное предложение позволяет рассматривать вместо поведения максимумов и минимумов частичных сумм одинаково распределенных величин поведение числа положительных и отрицательных членов в последовательности этих сумм. Назовем индекс $k \geqslant 1$ «ступенью» в последовательности $s_0, \ldots, s_n$, если $s_k \geqslant s_i$ для $i = 0, 1, \ldots, k-1$. Аналогично k — «чистая ступень», если $s_k > s_i$ для $i = 0, 1, \ldots, k-1$.

Теорема 2. Пусть $c_1 + \ldots + c_n \geqslant 0$. Тогда существует $p > 1$ циклических перестановок последовательности чисел $c_{i_1}, c_{i_2}, \ldots, c_{i_n}$ таких, что n является ступенью для последовательности частичных сумм

$$s_0, s_1 = c_{i_1}, s_2 = c_{i_1} + c_{i_2}, \ldots, s_n = c_{i_1} + \ldots + c_{i_n};$$

при этом каждая такая перестановка содержит ровно p ступеней. Если $c_1 + \ldots + c_n > 0$, то аналогичное утверждение имеет место для чистых ступеней. С помощью этой теоремы автор весьма просто выражает распределение вероятностей для положения

максимума в последовательности $s_0 = 0$, s_1, $s_2, \ldots, s_n$ частичных сумм независимых одинаково распределенных случайных величин через вероятности $P\{s_n > 0\}$ и получает таким образом теоремы, ранее доказанные Андерсеном (РЖМат, 1956, 631) и Спицером (РЖМат, 1958, 4860). Замечены следующие опечатки: стр. 79, 1-я строка сверху: вместо $x_1, \ldots, x_n$ должно быть $x_1, \ldots, x_{n-1}$; стр. 80, 8-я строка снизу: вместо $\varepsilon_1 i_1 + \varepsilon_2 i_2 + \ldots + \varepsilon_n i_n$ должно быть $(\varepsilon_1 i_1, \varepsilon_2 i_2, \ldots, \varepsilon_n i_n)$, стр. 89, 3-я строка сверху: вместо $s_j = \sigma_{a+j} = \sigma_a$ должно быть $s_j = \sigma_{a+j} - \sigma_a$. И. Ф. Красичков

10 В21. Замечание о некоторых случайных функциях, порожденных процессом Пуассона. Picinbono Bernard. Remarques sur certaines fonctions aléatoires dérivées d'un processus de Poisson. «C. r. Acad. sci.», 1959, **248**, № 16, 2280—2282 (франц.)

Пусть $X(\theta)$ — случайная функция, принимающая значения $\pm\frac{1}{2}$ и изменяющаяся в точках θ_j, распределенных по закону Пуассона. Весьма просто вычисляются $M[X(\theta_1)X(\theta_2)\ldots X(\theta_k)]$ и $M[dX(\theta_1)\,dX(\theta_2)\ldots dX(\theta_k)]$. Здесь $dX(\theta) = 0$, если интервал $d\theta$ содержит четное число точек изменения $X(\theta)$; $dX(\theta) = \pm 1$, если в интервале $d\theta$ число точек изменения $X(\theta)$ нечетно, при этом $dX(\theta) = +1$, если $X(\theta) = -\frac{1}{2}$ и $dX(\theta) = -1$, если $X(\theta) = +\frac{1}{2}$. В. С. Королюк

10 В22. Распределения, связанные со случайными блужданиями и возвратными событиями. Skellam I. S. Shenton L. R. Distributions associated with random walk and recurrent events. «J. Roy. Statist. Soc.», 1957, **B19**, № 1, 64—111 (англ.)

Рассматриваются неотрицательные одинаково распределенные целочисленные величины ξ_i и случайные блуждания, порожденные ими. Приводятся выражения в терминах производящих функций для распределения величины первого перескока через заданный барьер, распределения числа попаданий блуждающей частицы в фиксированный интервал и т. п. Рассматривается также непрерывный случай. Ряд результатов авторов был известен ранее (Feller, Trans. Amer. Math. Soc., 1949, **67**, № 1, 98—119). Следует отметить, что условия, при которых справедливы результаты авторов, не всегда сформулированы четко, например: авторы нигде не упомянули требование целочисленности величины ξ_i. М. Г. Шур

10 В23. Итерация некоторых матриц и процессов Маркова. Tortrat Albert. Itération de certaines matrices et processus de Markoff. «C. r. Acad. sci.», 1957, **245**, № 22, 1872—1874 (франц.)

Рассматривается случайное блуждание с переходной матрицей $\| p_{ij} \|$, где $p_{j,j+1} = p$, $p_{j,j-1} = q$ при $1 < j < n$ $(p + q = 1)$, а в состояниях 1 и n имеются барьеры любого типа. Приведены удобные формулы для подсчета безусловных распределений после n-го шага. Аналогичные формулы получены для одномерного броуновского блуждания. Отметим, что в данном автором определении поглощающего барьера 0 следует заменить на 1. М. Г. Шур

10 В24. Уточнение предельных теорем для однородных цепей Маркова. Нагаев С. В. «Теория вероятностей и ее применения», 1961, **6**, № 1, 67—86 (рез. англ.)

Работа посвящена асимптотическому анализу предельных теорем для однородных цепей Маркова с произвольным множеством состояний и содержит ряд теорем, обобщающих соответствующие результаты С. Х. Сираждинова (Докл. АН СССР, 1952, **84**, 1143—1146), полученные для однородных цепей Маркова с конечным числом состояний. Кроме того, в работе приводится доказательство интегральной и локальной теорем для больших уклонений, анонсированных автором ранее (Тр. Всесоюзного совещания по теории вероятностей и математической статистике, Ереван, 1960, 52—54). В. В. Петров

10 В25. Слабая эргодичность неоднородных цепей Маркова. Hajnal J. Weak ergodicity in nonhomogeneous Markov chains. «Proc. Cambridge Philos. Soc.», 1958, **54**, № 2, 233—246 (англ.)

Неоднородная дискретная цепь Маркова с N состояниями и матрицами переходных вероятностей (зависящими от времени) $P_1, P_2, P_3, \ldots$ называется эргодичной в слабом смысле, если для любого целого i и всех α, α', β от 1 до N справедливо

$$\lim_{n\to\infty} | h_{\alpha\beta}^{(i,n)} - h_{\alpha'\beta}^{(i,n)} | = 0;$$

где $h_{\alpha\beta}^{(i,n)}$ — элемент матрицы $H_{i,n} = \prod_{j=i+1}^{i+n} P_j$; матрица $P = \| p_{\alpha\beta} \|$ называется перемешивающей, если для любых двух строк α и β существует хоть один столбец γ, для которого $p_{\alpha\gamma} > 0$ и $p_{\beta\gamma} > 0$. Вводится понятие перемешивающей силы $\{P\}$ матрицы P

$$\{P\} = \min_{\alpha,\alpha'} \sum_{\beta} \min(p_{\alpha\beta}; p_{\alpha'\beta}).$$

Критерий слабой эргодичности неоднородной цепи Маркова формулируется с помощью этих понятий в теореме 3 следующим образом: Неоднородная цепь Маркова слабо эргодична тогда и только тогда, когда существует разбиение последовательности испытаний на блоки испытаниями $i_1, i_2, i_3, \ldots$ $(i_{j+1} - i_j = n_j)$ такое, что ряд

$$\sum_{j=1}^{\infty} \{H_{i_j,n_j}\}$$

расходится. Таким образом среди H_{i_j,n_j} должно быть бесконечное число перемешивающих матриц с $\{H_{i_j,n_j}\} > 0$. Вводится понятие модели матрицы — типа расположения ненулевых элементов в матрице — и формулируется достаточное условие слабой эргодичности неоднородной цепи Маркова в терминах моделей матриц вероятностей перехода. Для оценки скорости выравнивания строчек в матрицах $H_{0,n}$ с ростом n автор вводит понятие максимального размаха матрицы P, а именно

$$[P] = \max_{\beta} \max_{\alpha,\alpha^1} | p_{\alpha\beta} - p_{\alpha'\beta} |,$$

и доказывает, что $[H_{0,n}] \leqslant \prod_{j=1}^{n} (1 - \{P_j\})$, т. е. что размах убывает тем быстрее, чем сильнее перемешивание в P_i. В. М. Волков

10 В26. Исследование некоторых типов рекуррентных стохастических процессов. Takács Lajos. Bizonyos típusú rekurrens sztochasztikus folyamatok vizsgálatáról. «A magyar tud. akad. Alkalm. mat. int. közl.», 1954(1955), **3**, № 1-2, 115—128 (венг.; рез. русск., англ.)

Автор рассматривает процесс с возможными состояниями $E_1, \ldots, E_m$ (m может быть и бесконечным). Предполагается, что моменты времени t_n, где происходит переход из одного состояния в другое, такие, что $t_0 = 0$, $t_n - t_{n-1}$ $(n = 1, 2, \ldots)$ — независимые случайные величины, распределение которых зависит от состояния E_k, в котором находится процесс в течение времени $t_{n-1} \leqslant t < t_n$. Пусть $m_{ijk}(t)$ обозначает математическое ожидание числа переходов $E_j \to E_k$ за время $(0, t)$ при условии, что процесс в момент 0 находит-

ся в состоянии E_i, $\tau_{ik}(t)$ — математическое ожидание времени, проведенного в E_k за время $(0, t)$ при таком же условии. Доказывается, что распределение числа переходов $E_j \to E_k$ и распределение времени, проведенного E_k в $(0, t)$, можно определить с помощью функций $m_{ijk}(t)$ и $\tau_{ik}(t)$. Подробно рассматривается три примера. М. Арато

10 В27. О времени пребывания в теории стохастических процессов. Takács L. On a sojourn time problem in the theory of stochastic processes. «Trans. Amer. Math. Soc.», 1959, **93**, № 3, 531—540 (англ.)

Рассматривается стохастический процесс $\{\xi(t), 0 \leqslant t < \infty\}$ со значениями в абстрактном пространстве X, A и B — непересекающиеся подмножества X, причем $A + B = X$. Предполагается, что $\xi(0) \in A$, а $\xi(t)$ попадает либо в состояние A, либо в состояние B. Через $\xi_1, \eta_1, \xi_2, \eta_2, \ldots$ обозначается последовательность времен пребывания в состояниях A и B соответственно. Предполагается, что $\{\xi_n\}$ и $\{\eta_n\}$ — независимые последовательности положительных случайных величин и что

$$\lim_{n\to\infty} P\left\{\frac{\zeta_n - A_1 n}{A_2 n^a} \leqslant x\right\} = G(x),$$

$$\lim_{n\to\infty} P\left\{\frac{\chi_n - B_1 n}{B_2 n^b} \leqslant x\right\} = H(x),$$

где $G(x)$ и $H(x)$ — невырожденные функции распределения; $A_1 \geqslant 0$, $B_1 \geqslant 0$; $A_2 > 0$, $B_2 > 0$, $a > 0$, $b > 0$; $\zeta_n = \sum_{i=0}^{n} \xi_i$, $\chi_n = \sum_{i=0}^{n} \eta_i$. Через $\alpha(t)$ и $\beta(t)$ обозначено общее время пребывания в состояниях A и B соответственно, в интервале $(0, t)$. При этих условиях доказано существование

$$\lim_{t\to\infty} P\left\{\frac{\beta(t) - M_1 t}{M_2 t^m} \leqslant x\right\} = P(x),$$

где $P(x)$ — невырожденная функция распределения, M_1, M_2, m — константы, зависящие от $G(x)$ и $H(x)$. Дается таблица значений $P(x)$ и констант для некоторых частных случаев. Э. О. Рапопорт

10 В28. Свойства, относящиеся к совпадению процесса рождения и смерти. Karlin Samuel, McGregor James. Coincidence properties of birth and death processes. «Pacif. J. Math.», 1959, **9**, № 4, 1109—1140 (англ.)

Пусть $\| p_{ij}(t) \|$ — матрица переходных вероятностей процесса рождения и смерти с интенсивностями рождения и смерти λ_i и μ_i соответственно, где $\lambda_i > 0$ для $i \geqslant 0$, $\mu_i > 0$ для $i \geqslant 1$ и $\mu_0 = 0$. Предполагается, что интенсивности рождения и смерти однозначно определяют функции $p_{ij}(t)$, что эквивалентно условию

$$\sum_{n=0}^{\infty} (\pi_n + 1/\lambda_n \pi_n) = \infty,$$

где

$$\pi_0 = 1, \quad \pi_n = \frac{\lambda_0 \lambda_1 \ldots \lambda_{n-1}}{\mu_1 \mu_2 \ldots \mu_n}.$$

Сложный процесс рождения и смерти представляет векторный процесс n независимо движущихся частиц, каждая из которых подчиняется закону $\| p_{ij} \|$, и при этом накладывается еще условие, что не происходит совпадения. Для таких процессов теорема Дёблина — Чжуна (РЖМат, 1961, 2В21) усиливается утверждением существования предела

$$\lim_{t\to\infty} \frac{p\begin{pmatrix} t, & i_1, \ldots, i_n \\ & i_1, \ldots, i_n \end{pmatrix}}{p\begin{pmatrix} t, & k_1, \ldots, k_n \\ & l_1, \ldots, l_n \end{pmatrix}} < \infty,$$

где числа в скобках располагаются в естественном порядке

$$p\begin{pmatrix} t, & i_1, \ldots, i_n \\ & j_1, \ldots, j_n \end{pmatrix} = \det\left(p_{i_r j_s}(t)\right)_{r,s=1}^{n}.$$

Для тех же функций выводятся две системы дифференциальных уравнений, представляющих собою прямое и обратное уравнения сложного процесса. При доказательстве вышеприведенной теоремы автор использует полиномы $Q_i(x)$, однозначно определяемые из условий:

$$-xQ = AQ, \quad Q_i(0) = 1, \quad i = 1, 2, \ldots,$$

где $Q = (Q_0(x), Q_1(x), \ldots)$ и A — инфинитезимальная таблица процесса. $P_{n,m}(t)$ можно представить через $Q_i(x)$ в виде

$$P_{nm}(t) = \pi_m \int_0^{\infty} e^{-xt} Q_n(x)\, Q_m(x)\, d\psi(x),$$

где мера ψ единственная. Если ψ начинается r изолированными скачками, расположенными в точках $a_1 < \ldots < a_r$, $0 \leqslant n_1 < \ldots < n_k$ и $k \leqslant r$, то детерминант $|(Q_{i_j}(a_l))|_{j,l=1}^{k}$, умноженный на $(-1)^{\frac{k(k-1)}{2}}$, является строго положительным. Аналогичное утверждение доказывается для $k > r$. Далее рассматривается вероятность совпадения сложных процессов. Доказывается, что если процесс является возвратным или слабо невозвратным, то вероятность совпадения равна 1 тогда и только тогда, когда

$$v_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\lambda_k \pi_k} \sum_{r=0}^{\kappa} \pi_r (W_{k+1} - W_r) \to \infty,$$

где

$$W_r = \sum_{i=0}^{r-1} \frac{1}{\lambda_i \pi_i} \sum_{j=0}^{i} \pi_j \text{ и } W_0 = 0.$$

Примечание референта. Неправильно занумерованы страницы; правильный порядок: 1109, 1112, 1111, 1110, 1113. А. Prékopa

10 В29. Одна теорема о цепях Маркова. Doob J. L. A Markov chain theorem. «Probability and statistics. Stockholm, Almqvist and Wiksell; New York, John Wiley and Sons», 1959, 50—57 (англ.)

Рассматривается последовательность случайных величин $\{x_{an}, n \geqslant 0\}$, принимающих целые положительные значения, образующих цепь Маркова с начальным состоянием $x_{a0} = a$ и переходными вероятностями $p^{(k)}(a, b)$. Доказывается, что с вероятностью 1 существует предел

$$\lim_{n\to\infty} \frac{p^{(n-m)}(c, x_{bn})}{p^{(n)}(b, x_{bn})} = z, \quad m \geqslant 0.$$

При доказательстве этого факта используются теоремы о сходимости мартингалов, и полумартингалов, а также следующее общее свойство. Пусть $\{x_n', F_n, n \geqslant 1\}$ есть положительный мартингал и

$$\overline{P}(\Lambda) = \lim_{n\to\infty} \int_{\Lambda} x_n'\, dP$$

для $\Lambda \in \bigcup_n F_n$. Пусть $\{y_n', F_n, n \geqslant 1\}$ — положительный нижний полумартингал. Тогда $\{y_j'/x_j', j \leqslant n\}$ есть нижний полумартингал относительно вероятностной меры $\overline{P}$, рассматриваемой лишь на алгебре множеств F_n. Используя это свойство, выводится, что

$$\{p^{(n-m)}(c, x_{bn})/p^{(n)}(b, x_{bn}),\ n = \ldots, s+1, s\},$$

$s = \max(0, m)$, есть нижний полумартингал. Ю. А. Розанов

10 В30. Вероятности совпадения. Karlin Samuel, McGregor James. Coincidence probabilities. «Pacif. J. Math.», 1959, 9, № 4, 1141—1164 (англ.)

Пусть $P(t, x, E)$ — вероятностная функция перехода стационарного строго марковского процесса $x(t, \omega)$ с метрическим пространством состояний и с траекториями, непрерывными справа. Пусть далее $x_1, \ldots, x_n$ — n точек и $E_1, \ldots, E_n$ — борелевские множества в пространстве состояний. При условии, что прямое произведение n повторений $x(t, \omega)$ есть также строго марковский процесс, показывается, что детерминант

$$\begin{vmatrix} P(t, x_1, E_1) \ldots P(t, x_1, E_n) \\ \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ P(t, x_n, E_1) \ldots P(t, x_n, E_n) \end{vmatrix} \qquad (1)$$

равен $\sum_{\sigma} (\operatorname{sgn} \sigma) P_\tau(A_\sigma)$, где A_σ обозначает событие, что n частиц, реализующих этот процесс (вышеупомянутое прямое произведение), окажутся в момент t в состояниях $E\sigma_1, \ldots, E\sigma_n$ соответственно и при этом никакие две из них не совпадали за промежуток $[0, t)$, если в начальные моменты времени они находились в состояниях $x_1, \ldots, x_n$ соответственно, где $\sigma = (\sigma_1, \ldots, \sigma_n)$ — перестановка $1, \ldots, n$ и $\operatorname{sgn} \sigma$ равен 1 или (-1), если перестановка $(\sigma_1, \ldots, \sigma_n)$ четна (нечетна) (РЖМат, 1959, 7192). Если пространство состояний состоит из неотрицательных целых чисел и $P_{ij}(t) > 0$ для каждой пары i, j и $t > 0$, тогда для $t > 0$ детерминант (1) положителен, если $x_1 < \ldots < x_n$ и все элементы E_i меньше любого элемента E_j при $i < j$. В связи с теоремой Рейя (РЖМат, 1958, 6965) исследуется вопрос о существовании вещественного процесса $x(t, \omega)$ с непрерывными траекториями и с заданными вероятностями перехода, удовлетворяющими однородному уравнению Чэпмена — Колмогорова. А. Prékopa

10 В31. Унитарные расширения марковских переходных операторов и соответствующие интегральные представления для матриц вероятностей перехода. Kendall David G. Unitary dilations of Markov transition operators, and the corresponding integral representations for transition-probability matrices. «Probability and statistics». Stockholm, Almqvist and Wiksell; New York, John Wiley and Sons, 1959, 139—161 (англ.)

В основном рассматриваются марковские цепи с «сообщающимися» состояниями. Устанавливается, что вероятности $\{p_{jk}^n\}$ перехода за n шагов из состояния ε_j в состояние ε_k для такой цепи допускают представление в виде интеграла Фурье — Стилтьеса

$$p_{jk}^n = (m_j/m_k)^{1/2} \int_0^{2\pi} e^{in\theta}\, dM_{jk}(\theta), \quad n = 0, 1, \ldots,$$

при всех k, j, где $\{m_k\}$ есть последовательность положительных чисел («субинвариантная» мера) таких, что

$$\sum_{\alpha} m_\alpha p_{\alpha_j} \leqslant m_j$$

при всех j, а $dM_{jk}(\theta)$ — лебеговские комплекснозначные меры,

$$dM_{jk}(\theta) = \overline{dM_{kj}(\theta)}.$$

Этому результату предшествует теорема, утверждающая, что у марковской цепи с «сообщающимися» состояниями всегда существует хотя бы одна «субинвариантная» мера $\{m_k\}$. Исследуются свойства «спектральных» мер $dM_{jk}(\theta)$, связанные с асимптотическим при $h \to \infty$ поведением вероятностей перехода p_{jk}^n. В частности, доказывается, что «спектральные» меры $dM_{kj}(\theta)$ имеют лишь чисто дискретную и абсолютно непрерывную компоненты. Ю. А. Розанов

10 В32. Обобщение разложения Лагранжа на несколько переменных с приложениями к случайным процессам. Good I. J. Generalizations to several variables of Lagrange's expansion, with applications to stochastic processes. «Proc. Cambridge Philos. Soc.», 1960, **56**, № 4, 367—380 (англ.)

Пусть $\zeta = (\zeta_1, \zeta_2, \ldots, \zeta_n)$, $z = (z_1, z_2, \ldots, z_n)$ — комплексные переменные и $\zeta(z) = (\zeta_1(z), \zeta_2(z), \ldots, \zeta_n(z))$ — аналитическое в окрестности начала координат преобразование. В ряде теорем устанавливается связь между интегралами от мероморфных в окрестности $\zeta = z = 0$ функций $G(z(\zeta), \zeta)$ и $G(z, \zeta(z))$ по контурам $|\zeta_1| = |\zeta_2| = \ldots = |\zeta_n| = \delta$ и $|z_1| = |z_2| = \ldots = |z_n| = \delta$, а затем доказываются теоремы о связи между коэффициентами в разложениях этих функций по степеням ζ и z соответственно. Аналогичные результаты для $n=1$; 2 были известны. Полученные теоремы применяются к решению некоторых задач из теории ветвящихся случайных процессов и теории очередей с n различными типами клиентов. Например, упрощается вычисление коэффициентов в разложении производящей функции числа ветвей по ее обратной функции, которая может быть легко получена из общей теории ветвящихся процессов. В. П. Чистяков

10 В33. Построение неоднородных марковских процессов с помощью случайной замены времени. Волконский В. А. «Теория вероятностей и ее применения», 1961, **6**, № 1, 47—56 (рез. англ.)

Доказывается при широких предположениях, что неоднородный по времени одномерный марковский процесс может быть преобразован в винеровский с помощью случайной замены времени и преобразования фазового пространства. Эта теорема обобщает результаты автора (РЖМат, 1961, 5В195). Изучены также условия, при которых случайная замена времени преобразует строго марковский процесс в любом фазовом пространстве в марковский и в строго марковский. Пусть $X(t, \omega)$ — многомерный диффузионный процесс, а $\tau_t(\omega)$ — решение уравнения $\frac{d\tau_t}{dt} = \varphi(X(\tau_t, \omega), t)$; $\tau_0 = 0$. Тогда доказано, что $Y(t) = X(\tau_t)$ — диффузионный процесс, локальные характеристики которого получаются умножением на $\varphi(x, t)$ из локальных характеристик процесса $X(t)$. Р. З. Хасьминский

10 В34. О границах и краевых условиях дифференциальных уравнений Колмогорова. Feller William. «On boundaries and lateral conditions for the Kolmogorov differential equations» by William Feller. «Ann. Math.», 1958, **68**, № 3, 735—736 (англ.)

10 В35. Теория вероятностей и первая краевая задача. Doob J. L. La théorie des probabilités et le premier problème des fonctions frontières. «Publs Inst. statist. Univ. Paris», 1957, **6**, № 4, 289—290 (франц.)

10 В36. Предельная теорема для неубывающих случайных функций. Fisz M. A limit theorem for non-decreasing random functions. «Bull. Acad. polon. sci. Sér. sci. math., astron. et phys.», 1958, **6**, № 8, 485—487, XXXIX (англ.; рез. русск.)

Автор доказывает следующую теорему: Пусть $\{Y_k(t), -\infty < t < \infty\}$, $k = 1, 2, \ldots,$ — последовательность действительных сепарабельных независимых и одинаково распределенных стохастических процессов. Если соотношение $P\{Y_k(t_1) \leqslant Y_k(t_2)\} = 1$ имеет место для любых t_1, t_2 $(t_1 < t_2)$ и функция $F(t) = EY_k(t)$ $(-\infty < t < \infty)$ существует и удовлетворяет соотношениям $F(-\infty) = b$, $F(+\infty) = c$, где c и b — некоторые постоянные, тогда

$$P\left(\lim_{n\to\infty} \sup_t \left| \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} Y_k(t) - F(t) \right| = 0\right) = 1.$$

Резюме автора

10 В37. Об одном свойстве нормальных распределений произвольного стохастического процесса. Гаек Ярослав. «Чехосл. матем. ж.», 1958, 8, № 4, 610—618 (русск.; рез. англ.)

Два распределения вероятностей $P\{\cdot\}$ и $Q\{\cdot\}$, заданные на некотором борелевском поле $\mathfrak{F}$, эквивалентны ($P \equiv Q$), если уравнения $P\{\Lambda\} = 0$ и $Q\{\Lambda\} = 0$ вытекают одно из другого для всех $\Lambda \in \mathfrak{F}$. Наоборот, если можно найти такое $\Lambda \in \mathfrak{F}$, что $P\{\Lambda\} = 0$, $Q\{\Lambda\} = 1$, то скажем, что P и Q взаимно сингулярны ($P \perp Q$). Рассматривается J-различие плотностей $p(x_1, \ldots, x_n)$ и $(x_1, \ldots, x_n)$, определенное соотношением

$$J = M_p\left\{\lg \frac{p}{q}\right\} - M_q\left\{\lg \frac{p}{q}\right\},$$

где M_p и M_q — математическое ожидание

$$\lg \frac{p(x_1, \ldots, x_n)}{q(x_1, \ldots, x_n)}$$

по отношению к плотностям $p(x_1, \ldots, x_n)$ и $q(x_1, \ldots, x_n)$. Доказывается, что для любого $\varepsilon > 0$ можно найти число K_ε, обладающее следующим свойством: если n — произвольное натуральное число и $p(x_1, \ldots, x_n)$ и $q(x_1, \ldots, x_n)$ — произвольные (регулярные) n-мерные нормальные плотности, J-различие которых удовлетворяет условию $J > K_\varepsilon$, то можно найти такое $\Lambda \in F$, что

$$\int_\Lambda p(x_1, \ldots, x_n)\, dx_1 \ldots dx_n < \varepsilon,$$

$$\int_\Lambda q(x_1, \ldots, x_n)\, dx_1 \ldots dx_n > 1 - \varepsilon.$$

Доказательство проводится сначала для плотностей специального вида

$$p(x_1, \ldots, x_n) = (2\pi)^{-n/2} \exp\left\{-\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} x_i^2\right\},$$

$$q(x_1, \ldots, x_n) =$$

$$= (2\pi)^{-n/2} \exp\left\{-\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\left[\left(\frac{x_i - \mu_i}{\sigma_i}\right)^2 - \lg \sigma_i^2\right]\right\},$$

для которых

$$J = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\left[\frac{(\sigma_i^2 - 1)^2}{\sigma_i^2} + \mu_i^2\left(1 + \frac{1}{\sigma_i^2}\right)\right],$$

а затем распространяется на произвольные (регулярные) нормальные плотности. Утверждается, что если распределение вектора $(x_1, \ldots, x_n)$ нормальное (регулярное или сингулярное), то уравнение $x_n = \sum_{i=1}^{n-1} c_i x_i + c_0$, где c_i — произвольные постоянные, справедливо с вероятностью 0 и 1.

Доказывается основная теорема: Каждые два нормальных распределения $P\{\cdot\}$, $Q\{\cdot\}$ стохастического процесса $\{x_t, t \in T\}$ или эквивалентны, или взаимно сингулярны, смотря по тому, конечно или бесконечно их J-различие, где $J = \sup_{t_1 \ldots t_n \in T} J_{t_1 \ldots t_n}$ и $J_{t_1 \ldots t_n}$ обозначает J-различие соответствующих n-мерных P и Q распределений. Для иллюстрации теоремы приводятся два примера (в первом один процесс строится из другого изменением масштаба на оси значений, а во втором рассматриваются гауссовские марковские процессы с одинаковыми корреляционными функциями и разными средними).

В. И. Бабкин

10 В38. Функции отношения правдоподобия для гауссовских процессов. Pitcher T. S. Likelihood rations of Gaussian processes. «Arkiv. mat.», 1960, 4, № 1, 35—44 (англ.)

Пусть $x(t)$, $A \leqslant t \leqslant B$ — гауссовский процесс, принимающий действительные значения, $R(t, s)$ — его корреляционная функция, m — мера в пространстве выборочных функций. Если к $x(t)$ прибавить неслучайную функцию $f(t)$, то процесс $x(t) + f(t)$ снова будет гауссовским. Этому процессу соответствует мера m_f. В работе изучаются вопросы, связанные с абсолютной непрерывностью мер m и m_f. Взаимная абсолютная непрерывность мер m и m_f обозначается $m \equiv m_f$. Если A и B конечны, а $f \in L_2(A, B)$, то меры m и m_f взаимно сингулярны. В том случае, когда две меры m_1 и m_2, соответствующие гауссовским процессам $x_1(t)$ и $x_2(t)$, абсолютно непрерывны, представляет практический интерес вычисление плотности $\frac{dm_1}{dm_2}(x)$ одной меры по другой (Grenander U., Arkiv mat. 1950, **1**, № 3, 195). Доказываются следующие результаты:

Теорема 2.1. Если $m_f \equiv m$, то $m_{\lambda f} \equiv m$ для всех $\lambda \geqslant 0$, при этом

$$\ln \frac{dm_{\lambda f}}{dm}(x) = \lambda \varphi_f(x) - \frac{1}{2}\lambda^2 C,$$

где $C \geqslant 0$ и для любого вещественного a и почти всех пар функций (x, y)

$$\varphi_f(ax) = a\varphi_f(x), \quad \varphi_f(x + y) = \varphi_f(x) + \varphi_f(y).$$

Теорема 2.2. Если $\varphi \in L_p$ относительно меры m для всех $p > 0$,

$$\int \varphi(x)\, dm(x) = 0, \quad \int [\varphi(x)]^2\, dm(x) = c,$$

а $f(t) = \int x(t)\varphi(x)\, dm(x)$, то для любого n и любого $0 < \lambda < 1$

$$\frac{dm_{\lambda f}}{dm}(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{\left(\lambda\varphi(x) - \frac{1}{2}\lambda^2 C\right)^k}{k!} + O_n,$$

где

$$|O_n| \leqslant \lambda^{n+1} e^C \left(\frac{dm_f}{dm}(x) + \frac{dm_{-f}}{dm}(x)\right).$$

Теорема 2.3. Если F имеет ограниченную вариацию в интервале (A, B), а $f(s) = \int_A^B R(s, t)\, dF(t)$, то $m \equiv m_f$ и

$$\ln \frac{dm_f}{dm}(x) = \int_A^B x(t)\, dF(t) - \frac{1}{2}\int_A^B f(t)\, dF(t).$$

Обратно, если

$$\ln \frac{dm_f}{dm}(x) = \int_A^B x(t)\, dF(t) - \frac{1}{2}d,$$

то

$$d = \int_A^B f(t)\, dF(t), \quad f(s) = \int_A^B R(s, t)\, dF(t).$$

Ю. К. Беляев

10 В39. Новая предельная теорема для случайных процессов с гауссовскими приращениями. Гладышев Е. Г. «Теория вероятностей и ее применения», 1961, **6**, № 1, 57—66 (рез. англ.)

Доказана теорема: Пусть $\xi(t)$ $(0 \leqslant t \leqslant 1)$ — действительный случайный процесс с гауссовскими приращениями такой, что

1. Существует $M\xi(t)$ и $\left|\frac{dM\xi(t)}{dt}\right| < L_1$, $0 \leqslant t \leqslant 1$.

2. Существует корреляционная функция

$$r(t, s) = M\{[\xi(t) - M\xi(t)][\xi(s) - M\xi(s)]\}$$

процесса $\xi(t)$, обладающая следующими свойствами: а) $r(t, s)$ непрерывна при $0 \leqslant t,\ s \leqslant 1$, б) при $t \neq s$ существует $\frac{\partial^2 r(s, t)}{\partial t \partial s}$ и $\left|\frac{\partial^2 r(t, s)}{\partial t \partial s}\right| < \frac{L_2}{|t - s|^{\gamma}}$, $0 < \gamma < 2$, в) выражение

$$\frac{r(t, t) - 2r(t, t - h) + r(t - h, t - h)}{h^{2-\gamma}}$$

при $h \to 0$ равномерно на отрезке $0 \leqslant t \leqslant 1$ стремится к некоторой функции $g(t)$. Тогда с вероятностью 1

$$\lim_{n\to\infty} 2^{n(1-\gamma)} \sum_{k=1}^{2^n} \left(\xi\left(\frac{k}{2^n}\right) - \xi\left(\frac{k-1}{2^n}\right)\right)^2 = \int_0^1 g(t)\, dt.$$

В частном случае процесса со стационарными гауссовскими приращениями, имеющего среднее 0 и такую спектральную плотность $f(\lambda)$, что

$$\frac{f(\lambda)}{|\lambda|^{-\alpha}} = c + O(\lambda^{-2}) \text{ при больших } \lambda \text{ и } c > 0 \quad (1)$$

с вероятностью 1 выполняются соотношения:

$$\left.\begin{aligned} &\lim_{n\to\infty}\left\{2 - \frac{1}{n}\log_2 \sum_{k=1}^{2^n}\left(\xi\left(\frac{k}{2^n}\right) - \xi\left(\frac{k-1}{2^n}\right)\right)^2\right\} = \alpha \\ &\text{и} \\ &\lim_{u\to\infty}\left\{-\cos\frac{\pi\alpha}{2}\,\Gamma(\alpha)\, 2^{n(\alpha-2)-1} \times \right. \\ &\left. \times \sum_{k=1}^{2^n}\left(\xi\left(\frac{k}{2^n}\right) - \xi\left(\frac{k-1}{2^n}\right)\right)^2\right\} = c \end{aligned}\right\} \text{ при } 1 < \alpha < 3;$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{2^{n-1}}{n \ln 2} \sum_{k=1}^{2^n}\left(\xi\left(\frac{k}{2^n}\right) - \xi\left(\frac{k-1}{2^n}\right)\right)^2 = c \text{ при } \alpha = 3,$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{2^n}{n} \sum_{k=1}^{2^n}\left(\xi\left(\frac{k}{2^n}\right) - \xi\left(\frac{k-1}{2^n}\right)\right)^2 = 0 \text{ при } \alpha > 3.$$

Отсюда делается вывод, что поведение спектральной плотности процесса на бесконечности (при $1 < \alpha < 3$) определяется с вероятностью 1 по известной одной реализации процесса на произвольном (сколь угодно малом) отрезке оси t. Кроме того, если два случайных процесса со спектральными плотностями $f_1(\lambda)$ и $f_2(\lambda)$, удовлетворяющими условию (1) таковы, что $c_1 \cdot c_2 \neq 0$ и $\lim_{\lambda\to\infty} \frac{f_1(\lambda)}{f_2(\lambda)} \neq 1$, то вероятностные меры в функциональном пространстве реализаций, соответствующие этим двум процессам, сингулярны друг относительно друга. Полученные результаты являются обобщением соответствующих теорем Бакстера (РЖМат, 1958, 9033) и Слепяна (РЖМат, 1958, 9033). Специально рассмотрен класс процессов со стационарными приращениями, имеющих степенную структурную функцию.

М. И. Фортус

10 В40. О полиномиальной аппроксимации строго стационарных процессов. Nishio Makiko. On polynomial approximation for strictly stationary processes. «J. Math. Soc. Japan», 1960, **12**, № 2, 207—226 (англ.)

Пусть $B(t, \omega)$ — броуновское движение и $X(t, \omega)$ — полином от его приращений:

$$X(t, \omega) = \sum_p \sum_{i_1, \ldots, i_p} a_{i_1, \ldots, i_p} \prod_{\nu=1}^{p} \{B(t + s_{i_\nu}, \omega) - B(t + u_{i_\nu}, \omega)\}. \quad (1)$$

Назовем такой процесс полиномиальным. Каждый полиномиальный процесс есть строго стационарный, однако, очевидно, не каждый строго стационарный процесс является полиномиальным. Цель этой статьи — доказать, что строго стационарный процесс допускает некоторую аппроксимацию полиномиальными процессами. Для произвольного процесса $X(t, \omega)$ пусть $U(X, \varepsilon)$ обозначает класс всех процессов $Y(t, \omega)$, удовлетворяющих условию

$$|Ee^{i\theta_1 X(t_1,\omega) + \ldots + i\theta_n X(t_{n'},\omega)} - Ee^{i\theta_1 Y(t_1,\omega) + \ldots + i\theta_n Y(t_{n'},\omega)}| < \varepsilon,$$

где

$$n < \frac{1}{\varepsilon},\ |\theta_l| < \frac{1}{\varepsilon},\ |t_l| < \frac{1}{\varepsilon}.$$

Основная теорема. Если процесс $X(t, \omega)$ $(-\infty < t < +\infty)$ есть строго стационарный, непрерывный по вероятности и эргодический в том смысле, что любой измеримый функционал от этого процесса, инвариантный при сдвиге временной шкалы, является константой, то $X(t, \omega)$ аппроксимируется полиномиальными процессами по топологии U. Если $X(t, \omega)$ есть строго стационарный и непрерывный по вероятности, то существует последовательность эргодических процессов $X_n(t, \omega)$, обладающих теми же свойствами, сходящаяся к $X(t, \omega)$ по топологии U (вероятностное пространство может при этом меняться вместе с n). Если $X(t, \omega)$ — строго стационарный и непрерывный по вероятности, то существует последовательность полиномиальных процессов, сходящаяся к $X(t, \omega)$ по топологии U. Если $X(t, \omega)$ — строго стационарный гауссовский процесс, непрерывный по вероятности, то существует последовательность линейных процессов (т. е. $p = 1$ в (1)), которая сходится к $X(-t, \omega)$ по топологии U. Подобные же вопросы рассматриваются для стационарных случайных последовательностей, где вместо $B(t, \omega)$ фигурирует последовательность независимых случайных величин, распределенных $N(0, 1)$.

А. Prékopa

10 В41. О случайных распределениях. Onoyama Takuji. Note on random distributions. «Mem. Fac. Sci. Kyushu Univ.», 1959, **A13**, № 2, 208—213 (англ.)

Рассматривается гильбертово пространство H комплексных случайных величин с нулевым средним и конечной дисперсией, в котором скалярное произведение определяется как $(X, Y) = E(X \cdot \bar{Y})$. Одновременно рассматривается пространство основных функций K_p с экспоненциальным законом убывания порядка p (как принято в теории обобщенных функций). Случайным распределением называется непрерывный линейный функционал, определенный на K_p и принимающий значения в H. Изучаются стационарные случайные распределения, т. е. такие распределения X, что для любых $\varphi, \psi \in K_p$

$$(X(\tau_h\varphi), X(\tau_h\psi)) = (X(\varphi), X(\psi)),$$

где τ_h есть оператор сдвига $\tau_h\varphi(x) = \varphi(x + h)$. Полу-

чено спектральное представление стационарного случайного распределения. Б. М. Клосс

10 В42. Условные математические ожидания и эргодическая теорема для строго стационарных обобщенных процессов. Urbanik K. The conditional expectations and the ergodic theorem for strictly stationary generalized stochastic processes. «Studia math.», 1958, **17**, № 3, 267—283 (англ.)

Работа посвящена перенесению эргодической теоремы с обычных стационарных процессов на обобщенные (в смысле Урбаника). Обобщенный процесс $\Phi(\omega, t)$ называется строго стационарным, если существует последовательность обычных строго стационарных процессов $f_n(\omega, t)$, $n = 1, 2, \ldots$, такая, что $\Phi(\omega, t) = [f_n(\omega, t)]$. Известно, что всякий обобщенный процесс $\Phi(\omega, t)$ есть в некотором смысле производная обычного случайного процесса $F(\omega, t)$:

$$\Phi(\omega, t) = \frac{d^k}{dt^k} F(\omega, t).$$

Автор утверждает, что обобщенный процесс $\Phi(\omega, t)$ строго стационарен тогда и только тогда, когда всевозможные конечные разности $\Delta_h^{(k)} F(\omega, t) = \Delta_{h_1} \Delta_{h_2} \ldots \Delta_{h_k} F(\omega, t)$ соответствующего процесса $F(\omega, t)$ строго стационарны в обычном смысле. Вводится понятие условного математического ожидания. Именно, если $\Phi(\omega, t)$ есть k-я производная обычного процесса $F(\omega, t)$, у которого существует условное математическое ожидание $M[F(\omega, t)|\mathfrak{F}]$ относительно некоторой σ-алгебры $\mathfrak{F}$, причем среднее $M|F(\omega, t)|$ интегрируемо по t на каждом конечном интервале, то условное математическое ожидание $\Psi(\omega, t)$ обобщенного процесса $\Phi(\omega, t)$ определяется равенством

$$\Psi(\omega, t) = \frac{d^k}{dt^k} M[F(\omega, t)|\mathfrak{F}].$$

Это условное математическое ожидание обладает всеми обычными свойствами. Вводится также понятие алгебры инвариантных множеств $\mathfrak{F}_\Phi$ обобщенного процесса $\Phi(\omega, t)$ как

$$\mathfrak{F}_\Phi = \bigcap_{k=k_0}^{\infty} \bigcap_{0<h<1} \mathfrak{F}_h^{(k)},$$

где k_0 есть наименьшее число k, для которого существует процесс $F(\omega, t)$, обладающий тем свойством, что $\frac{d^k}{dt^k} F(\omega, t) = \Phi(\omega, t)$, а $\mathfrak{F}_h^{(k)}$ есть алгебры инвариантных множеств процессов $\Delta_h^{(k)} F$.

Доказывается основная теорема. Пусть $\Phi(\omega, t)$ есть строго стационарный обобщенный процесс, у которого существует математическое ожидание $M\Phi(\omega, t)$. Тогда

$$\frac{1}{T} \int_t^{t+T} \Phi(\omega, u)\, du \to M[\Phi(\omega, t)|\mathfrak{F}_\Phi]$$

при $T \to \infty$ (здесь случайная величина $M[\Phi(\omega, t)\mathfrak{F}_\Phi]$ не зависит от t и совпадает с $M\Phi(\omega, t)$, если алгебра $\mathfrak{F}_\Phi$ инвариантных множеств тривиальна).

Ю. А. Розанов

10 В43. Об интерполировании стационарных процессов с дискретным временем. Розанов Ю. А. «Докл. АН СССР», 1960, **130**, № 4, 730—733

Рассматривается задача линейной интерполяции стационарного процесса $X(t)$ с дискретным временем, значения которого известны всюду, кроме конечного множества $T = (t_1, \ldots, t_s)$. Пусть $T = (t_\nu, t_\nu + 1, \ldots, t_\nu + s - 1)$. Тогда значения $X(t)$, $t \in T$, точно интерполируются, если s не превышает числа m нулей спектральной плотности процесса $X(t)$; в общем случае $s - m$ есть размерность пространства ошибок. Выписывается спектральное разложение интерполирующих функций. Указывается, что для процесса с абсолютно непрерывным спектром пространства ошибок в сумме по всем T дают все пространство H, натянутое на $(X(t), -\infty < t < +\infty)$. И. В. Гирсанов

10 В44. Теорема Крамера о монотонных матричнозначных функциях и разложение Вольда. Masani P. Cramér's theorem on monotone matrixvalued functions and the Wold decomposition. «Probability and statistics. Stockholm, Almqvist and Wiksell; New York, John Wiley and Sons», 1959, 175—189 (англ.)

Рассматриваются некоторые частные случаи, в которых разложение спектральной меры многомерного стационарного процесса на сингулярную и абсолютно непрерывную компоненты соответствует разложению Вольда самого процесса в сумму сингулярного и регулярного процессов. Ю. А. Розанов

10 В45. Обобщение винеровской теории прогнозирования. Kondo Jiro. An extension of N. Wiener's prediction theory. «J. Operat. Res. Soc. Japan», 1960, **2**, № 3, 124—129 (англ.)

10 В46. Анализ временных рядов и стохастическое предсказание. II. Ogawara Masami. Time series analysis and stochastic prediction. II. «Bull. Math. Statist.», 1960, 8, № 3-4, 55—72 (англ.)

Часть I см. РЖМат, 1960, 14123. Пусть имеется случайный процесс $x(t)$, $t \in T$, «наблюдаемый» в моменты времени $t \in T'$, где $T' \subset T$. Если известно его вероятностное распределение, то под стохастическим прогнозом величины $x(t_0)$ $t_0 \in T - T'$, автор понимает условное распределение этой величины при фиксированных $x(t)$, $t \in T'$. В случае, когда вероятностное распределение процесса $x(t)$ неизвестно, скажем, содержит неизвестные параметры, в качестве стохастического прогноза — «условного» распределения неизвестной величины $x(t_0)$ — предлагается распределение некоторых функционалов от известной части траектории процесса $x(t)$, $t \in T'$. Автор рассматривает некоторые гауссовские стационарные процессы $x(t)$ и стохастический прогноз величины $x(t_0)$ по «наблюдаемым» значениям $x(t_0 - \tau - s)$, $s > 0$, $\tau = 0, \ldots, L$, определенного вида. С этой точки зрения рассматривается также процесс $x(t)$ с непрерывным временем, удовлетворяющий соотношению

$$x(t) - m + a_1 x'(t) + \ldots + a_n x^{(n)}(t) = z'(t),$$

где $m = Mx(t)$, $z(t)$ — процесс броуновского движения, а коэффициенты a_k неизвестны, для которого приводятся некоторые формулы «стохастического прогноза» величины $x(t_0)$ по наблюдениям процесса $x(t)$ при $t \in [t_0 - s, t_0 - s - L]$. Этот «прогноз», в частности, обладает тем свойством, что при $t \to \infty$ сходится с вероятностью 1 к условному распределению величины $x(t_0)$ при фиксированных $x^{(p)}(t_0 - s)$, $p = 0, \ldots, n$,—результат, хорошо согласующийся с известным фактом теории линейного прогнозирования. Рассматриваются также некоторые другие вопросы, сходные с вопросом о «стохастическом прогнозе». Ю. А. Розанов

10 В47. Нелинейный прогноз. Masani P., Wiener M. Non-linear prediction. «Probability and statistics. Stockholm, Almqvist and Wiksell; New York, John Wiley and Sons», 1959, 190—212 (англ.)

Итогом заметки является замечание о том, что по известным смешанным моментам значений стационарной последовательности $\{f_n\}$ (f_n ограничены с вероятностью 1) можно найти последовательность полиномов $Q_q(f_0, \ldots, f_{-q})$ от её значений таких, что

$$M\{f_\nu \mid f_{k,\, k \leqslant 0}\} = \lim_{q \to \infty} Q_q(f_0, \ldots, f_{-q}), \quad \nu > 0.$$

Ю. А. Розанов

10 В48. Некоторые нелинейные задачи в теории вероятностей. Grenander Ulf. Some non linear problems in probability theory. «Probability and statistics, Stockholm, Almqvist and Wiksell; New York, John Wiley and Sons», 1959, 108—129 (англ.)

Рассматриваются несколько различных нелинейных преобразований стационарных процессов. Вычисляется корреляционная функция

$$R(t) = MH(x(0))\,H(x(t))$$

процесса $H(x(t))$, где

$$x(t) = \sum_{-n}^{n} A_\nu e^{i(t\nu h + f_\nu)} -$$

стационарный процесс с дискретным спектром (A_ν — постоянные, f_ν независимы между собой $-n \leqslant \nu \leqslant n$), а

$$H(x) = \sum_{0}^{\infty} a_r 2^r$$

аналитична в круге

$$|x| \leqslant \sum_{-n}^{n} |A_\nu|.$$

Далее рассматривается преобразование вида

$$y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} k(t+s)\,x^2(s)\,ds$$

гауссовского стационарного процесса $x(t)$ со спектральной плотностью $f(\lambda)$. Показывается, что распределение величины $\varphi(0)$ имеет характеристическую функцию

$$\psi(\alpha) = \prod_{\nu=1}^{\infty} (1 - 2i\alpha\lambda_\nu)^{-1/2},$$

где λ_ν, $\nu = 1, 2, \ldots$, есть собственные числа ядра $H(s,t) = \sqrt{k(s)}\,R(s-t)\sqrt{k(t)}$; $R(t)$ — ковариационная функция процесса $x(t)$. Рассматриваются также нелинейные дифференциальные уравнения вида $\dot{x} + a(x) = y$ (y — «белый шум»), уравнения со случайными коэффициентами типа

$$a_n(t)\frac{d^n x}{dt^n} + \ldots + a_0(t)\,x(t) = y(t)$$

($a_0, \ldots, a_n$ не зависят от x) и некоторые другие вопросы (в том числе предельные теоремы на компактных группах). Ю. А. Розанов

10 В49. Стохастические итерации. Schmetterer L. Sur l'itération stochastique. «Calcul probabilités et applic. Paris, CNRS», 1959, 55—63. Discuss., 64—67 (франц.)

Статья посвящена изучению стохастических итераций типа Роббинса—Монро и Кифера—Вольфовица в случае, когда основным пространством, на котором определены случайные элементы, является произвольное действительное гильбертово пространство H. Основная теорема, касающаяся процедуры Роббинса—Монро, формулируется так:

Теорема 1. Пусть $M(x)$ — отображение пространства H в H, удовлетворяющее следующим условиям: существуют два элемента α и ϑ из H и две константы k и $K > 0$, для которых $\|M(x) - \alpha\| \leqslant K\|x - \vartheta\|$ и $(x - \vartheta, M(x) - \alpha) \geqslant k\|x - \vartheta\|^2$ при любом $x \in H$. Пусть X_1 — какой-нибудь случайный элемент, для которого $E(\|X_1 - \vartheta\|)^2$ существует и конечно. Пусть стохастические итерации определяются формулой

$$X_{n+1} = X_n - a_n(M(X_n) + \varepsilon_{X_n} - \alpha),$$

где положительные константы a_n удовлетворяют условиям

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \infty, \quad \sum_{n=1}^{\infty} a_n^2 < \infty,$$

а совокупность случайных элементов ε_X подчиняется следующим условиям: для любого x из H и любого отображения $A(x)$ пространства H в H имеет место $E(A(X), \varepsilon_X) = 0$ и $E(\|\varepsilon_X^2\|) \leqslant \sigma^2 < \infty$. Тогда последовательность $\{X_n\}$ будет сходиться к корню ϑ уравнения $M(X) = \alpha$ в том смысле, что

$$P(\lim_{n\to\infty} \|X_n - \vartheta\| = 0) = 1.$$

При этом имеет место оценка

$$E(\|X_n - \vartheta\|^2) \leqslant$$

$$\leqslant \prod_{i=1}^{n-1} (1 - 2a_i k + Ka_i^2)\,[E(\|X_1 - \vartheta\|^2)] +$$

$$+ \sum_{i=1}^{n-1} \frac{a_i\sigma^2}{\prod_{j=1}^{i} (1 - 2a_j k + Ka_j^2)}.$$

Относительно процедуры Кифера — Вольфовица, в которой стохастические итерации используются для нахождения положения максимума линии регрессии $M(x)$, доказана теорема 2, дающая гильбертово обобщение теоремы Дворецкого о сходимости, но при этом предполагается, что основное пространство H сепарабельно. К статье приложена запись обсуждения вопросов, примыкающих к теме статьи. Приводятся высказывания Хаммерсли (Hammersley), Вольфовица (Walfowitz), Парзена (Parsen) и Уиттла (Whittle). В. М. Волков

10 В50 К. Введение в теорию случайных процессов. Бартлетт М. С. Перев. с англ. М. Изд-во ин. лит., 1958, 384 стр., илл., 15 р. 25 к.

10 В51 Д. Исследования по проблеме случайного блуждания. Henze Ernst. Beiträge zum Irrfahrtproblem. Diss., Dokt. Naturwiss. Techn. Hochschule Stuttgart, 1958, 155 S., ill. (нем.)

После обзора основных понятий и проблем теории стационарных дискретных цепей Маркова рассматриваются задачи, связанные с однородными случайными блужданиями по целочисленной двумерной решетке. Вначале рассматриваются симметричные блуждания, при которых вероятности перехода из данного узла решетки в любой из четырех соседних узлов одинаковы (и, следовательно, равны $1/4$), а затем, менее детально, — общий случай, когда указанные вероятности имеют произвольные значения (в сумме равные единице). Рассматриваются блуждания в трех областях: неограниченной плоскости, полуплоскости с поглощающей границей и плоскости с разрезом по отрицательной полуоси, на котором происходит поглощение (последняя область рассматривается лишь в случае симметричных блужданий). Как в случае симметричных, так и несимметричных блужданий в указанных областях для вероятностей перехода за n шагов из одного узла решетки в любой другой удается получить явные аналитические выражения в виде интегралов, которые могут быть выражены также в виде конечных сумм. Так, например, в случае несимметричного блуждания в неограниченной области

$$p^{(n)}(x, y; \xi, \eta) =$$

$$= \frac{2^n}{(2\pi)^2}\left(\frac{p_1}{q_1}\right)^{\frac{x-\xi}{2}}\left(\frac{p_2}{q_2}\right)^{\frac{y-\eta}{2}} \int_{-\pi}^{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} (\sqrt{p_1 q_1}\cos\alpha +$$

$$+ \sqrt{p_2 q_2}\cos\beta)^n \cos\alpha\,(x-\xi)\cos\beta\,(y-\eta)\,d\alpha d\beta.$$

Находятся асимптотические выражения для этих вероятностей при неограниченном уменьшении ячейки решетки и масштаба времени. Для областей с поглощающими границами подсчитывается среднее число посещений фиксированной точки до попадания на поглощающую границу, вероятность поглощения за n шагов (а также за любое время), в определенной точке границы (или где-либо на границе), средняя продолжительность блуждания до момента поглощения. Для всех этих величин находятся явные аналитические выражения. А. С. Монин

МАТЕМАТИЧЕСКАЯ СТАТИСТИКА

Редактор *Н. В. Смирнов*

10 В52. О работах Н. В. Смирнова по математической статистике (К шестидесятилетию со дня рождения). Гнеденко Б. В., Колмогоров А. Н., Прохоров Ю. В., Сарманов О. В. «Теория вероятностей и ее применения», 1960, **5**, № 4, 436—440

10 В53. Некоторые примеры фидуциального восстановления. Tukey John W. Some examples with fiducial relevance. «Ann. Math. Statistics», 1957, **28**, № 3, 687—695 (англ.)

В теории фидуциальных вероятностей, развитой Фишером, большое принципиальное значение имеет постулируемая им единственность распределения, индуцируемого множеством стержневых, достаточных и гладко обратимых количеств, так как эта единственность означает, что распределение не зависит от выбора множества «стержневых» количеств, если оно удовлетворяет этим свойствам. Автор показывает, однако, на ряде примеров, что перечисленные условия не обеспечивают единственность фидуциального распределения. Н. В. Смирнов

10 В54. Выравнивание эмпирических данных при переписях. Riggi O'Dwyer Guillermo. Ajustamientos de series estadísticas frecuentes en los censos. «Rev. cartogr.», 1958, **7**, № 7, 119—125 (исп.)

10 В55. Замечание по поводу преобразования Кенуем рядов Эджворта типа *A*. Pearson E. S. Note on Mr Quenouille's Edgeworth type *A* transformation. «Biometrika», 1959, **46**, № 1-2, 203—204 (англ.)

Замечания по поводу особенностей разложения плотности распределения в ряд Эджворта в связи с методикой, примененной в статье Кенуя (РЖМат, 1960, 11885). Б. В. Финкельштейн

10 В56. Формулы для верхней границы коэффициента вариации в простом случае двустадийного выбора. Bedenić Branko. Jedna formula za gornju granicu relativne varijance ocjene totala kvalitativnog obilježja u dvoetapnom jednostavnom slučajnom uzorku. «Statist. rev.», 1958, **8**, № 4, 298—301 (сербо-хорв.; рез. англ.)

10 В57. Многомерный статистический разброс. Wilks S. S. Multidimensional statistical scatter. «Contribs Probability and Statist.» Stanford, Calif., Univ. Press, 1960, 486—503 (англ.)

Пусть $(x_{1\alpha}, \ldots, x_{k\alpha})$, $\alpha = 1, \ldots, n$) — выборка O_n объема n из k-мерного распределения $F(x_1, \ldots, x_k)$, центр тяжести которого $(\mu_1, \ldots, \mu_k)$, где $\mu_l = \int_{R_k} x_l dF(x_1, \ldots, x_k)$, и матрица вторых моментов $\| \sigma_{ij} \|$, $\sigma_{ij} = \int_{R_k} (x_l - \mu_l) \times (x_j - \mu_j)\, dF(x_1, \ldots, x_k)$, $i, j = 1, 2, \ldots, k$, R_k — k-мерное евклидово пространство. Пусть $(x_{10}, \ldots, x_{k0})$ — произвольная точка в R_k и $(x_{1\alpha_l}, \ldots, x_{k\alpha_l})$, $i = 1, \ldots, k$ — любые k точек выборки O_n. Вводится понятие: k-мерным разбросом выборки O_n относительно точки $(x_{10}, \ldots, x_{k0})$ называется

$$S_{k, x_0, n} = \sum_{1 \leqslant \alpha_1 < \ldots < \alpha_k \leqslant n} V^2_{\alpha_1, \ldots, \alpha_k 0},$$

где

$$V_{\alpha_1, \ldots, \alpha_k, 0} = \begin{vmatrix} x_{1\alpha_1} - x_{10} \ldots x_{k\alpha_1} - x_{k0} \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ x_{1\alpha_k} - x_{10} \ldots x_{k\alpha_k} - x_{k0} \end{vmatrix}.$$

В разделах 2—4 доказываются свойства:

1) $$\min_{x_0} (S_{k, x_0, n}) = S_{k, \bar{x}, n} = |u_{ij}|,$$

где

$$\bar{x} = (\bar{x}_1, \ldots, \bar{x}_k), \quad \bar{x}_i = \sum_{\alpha=1}^{n} \frac{x_{i\alpha}}{n},$$

$$u_{ij} = \sum_{\alpha=1}^{n} (x_{i\alpha} - \bar{x}_i)(x_{j\alpha} - \bar{x}_j), \quad i, j = 1, 2, \ldots k;$$

2) $$\min_{x_0} [\text{M. O. } (S_{k, x_0, n})] = \text{M. O. } (S_{k, \mu, n}) = k! C^k_n \cdot |\sigma_{ij}|.$$

В разделах 5—9 дается обзор известных результатов многомерного статистического анализа в терминах, введенного выше понятия статистического разброса. Л. С. Трофименко

10 В58. Замечание по поводу двух статей К. Р. Наира. Brunk H. D. Note on two papers of K. R. Nair. Author's reply, «J. Indian Soc. Agric. Statist.», 1959, **11**, № 1-2, 186—190 (англ.)

Пусть $x_1 \leqslant x_2 \leqslant x_3 \leqslant, \ldots, \leqslant x_n$ — вещественные числа и

$$\bar{x} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} x_i, \quad s_x^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^{n} (x_i - \bar{x})^2.$$

В статье с помощью одной простой леммы доказываются неравенства

$$\frac{(\bar{x} - x_1)^2}{s_x^2} \geqslant \frac{1}{n}$$

(знак равенства достигается при $x_1 = x_2 = \ldots x_{n-1}$) и

$$\frac{g_x^2}{s_x^2} \geqslant \frac{4}{n},$$

где

$$g_x = \frac{2}{n(n-1)} \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=i+1}^{n} (x_j - x_i),$$

ранее доказанные Наиром. Тут же помещены ответные замечания Наира. М. К. Камалов

10 В59. Некоторые проблемы выборки, когда рассматривающая величина подчиняется логарифмически нормальному закону. Quensel C. E. Some sampling problems when a stratification variable follows a logarithmic normal distribution. «Skand. aktuarietidskr.», 1958(1959), № 3-4, 177—184 (англ.)

Пусть на некоторой совокупности заданы два признака Y и X. Признак Y является скрытым, т. е. его распределение неизвестно. Распределение X известно. При оценке среднего значения признака Y с целью уменьшения дисперсии оценки совокупность подвергается расслоению, при этом используется информация о распределении X и о корреляции между X, Y, на основе чего выбираются точки деления и объемы выборок из каждого слоя. В статье исследуется вопрос об оптимальном выборе точек расслоения и относительное преимущество разных схем выбора, в случае когда X распределена логарифмически нормально. И. Ф. Красичков

10 В60. Замечание об эффективности двойного выбора при расслоении. Jambunathan M. V. A note on the efficiency of double sampling for stratification. «Sankhya Indian J. Statist.», 1960, **22**, № 3-4, 367—370 (англ.)

Рассматривается метод двойной выборки в условиях, когда первичная выборка разбивается на слои в зависимости от значений наблюденной вспомогательной величины X (Neyman J., Amer. Statist. Assoc., 1938, **33**, 101—116). Найдены условия, при которых оценки, получаемые этим методом, эффективнее оценок, получаемых с помощью обычных выборок. М. Г. Шур

10 В61. Некоторые некоррелированные статистики. Hogg Robert V. Certain uncorrelated statistics. «J. Amer. Statist. Assoc.», 1960, **55**, № 290, 265—267 (англ.)

Статистика $T(X_1, X_2, \ldots, X_n)$ называется нечетной статистикой, не зависящей от положения, если для всех вещественных $x_1, x_2, \ldots, x_n$ имеют место равенства

$$T(x_1+h, x_2+h, \ldots, x_n+h) = T(x_1, x_2, \ldots, x_n) + h$$

для любого h и

$$T(-x_1, -x_2, \ldots, -x_n) = -T(x_1, x_2, \ldots, x_n).$$

Статистика $S(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ называется четной статистикой, не зависящей от положения, если

$$S(x_1+h, x_2+h, \ldots, x_n+h) = S(x_1, x_2, \ldots, x_n)$$

для любого h и

$$S(-x_1, -x_2, \ldots, -x_n) = S(x_1, x_2, \ldots, x_n).$$

Доказывается теорема: Пусть $x_1, x_2, \ldots, x_n$ — случайная выборка из непрерывного или дискретного распределения, симметричного относительно точки C. Если коэффициент корреляции между $T(X_1, X_2, \ldots, X_n)$ и $S(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ существует, то он равен нулю. Отмечается, что теорема может быть обобщена на случай зависимых X_i. М. К. Камалов

10 В62. Распределение характеристических корней выборочных ковариационных матриц. James Alan T. The distribution of the latent roots of the covariance matrix. «Ann. Math. Statistics», 1960, **31**, № 1, 151—158 (англ.)

Вычисляется распределение характеристических корней выборочной ковариационной матрицы для случая произвольной ковариационной матрицы нормальной генеральной совокупности. Вывод основывается на теории представлений линейных групп. Ответ представлен в виде ряда по зональным полиномам. Ю. Ф. Кичатов

10 В63. Вклад в теорию порядковых статистик. Правила вычисления вероятностей ранговых порядков. Savage I. Richard. Contributions to the theory of rank order statistics: computation rules for probabilities of rank orders. «Ann. Math. Statistics», 1960, **31**, № 2, 519—520 (англ.)

Даются рекуррентные (в обратную сторону) правила вычисления вероятностей ранговых порядков для одной и двух выборок. В первом случае вероятности, относящиеся к выборке объема n, выражаются через вероятности для выборки объема $n+1$. Во втором случае вероятности для двух выборок объемов m и n выражаются через вероятности для выборок объемов $m+1$ и n или же m и $n+1$ (Ранговым порядком для выборки $x_1, \ldots, x_n$ из совокупности с гипотетической медианой ξ называется случайный вектор $z=(z_1, \ldots, z_n)$, где $z_i=0(1)$, если в упорядоченной в возрастающем по абсолютной величине последовательности уклонений $x_k - \xi$ на i-м месте стоит отрицательное по знаку (положительное) уклонение. Ранговым порядком для двух выборок $x_1, \ldots, x_m; y_1, \ldots, y_n$ называется случайный вектор $z=(z_1, \ldots, z_{m+n})$, где $z_i=0(1)$, если i-й член в вариационном ряду объединенной выборки $x_1, \ldots, x_m; y_1, \ldots, y_m$ происходит из первой (второй) выборки. — *Ред.*) E. Csáki

10 В64. Повторные переписи с возможным дублированием. II. Оценка в случае наличия иммиграции или смерти. Darroch J. N. The multiple-recapture census. II. Estimation when there is immigration or death, «Biometrika», 1959, **46**, № 3-4, 336—351 (англ.)

В работе содержится обобщение результатов, полученных в части I (РЖМат, 1961, 4В36), на случай популяции переменного объема. Пользуясь прежними обозначениями, автор рассматривает случаи изменения объема популяции в промежуток между выборками вследствие миграции, или смерти, или обоих этих причин вместе. Величина изменения объема рассматривается как параметр и для первых двух случаев автор получает асимптотически эффективные оценки объема совокупности. В третьем случае оценка сопряжена с большими вычислительными трудностями и может быть проведена с помощью нахождения $p_2, p_3, \ldots, p_{s-1}$, где p_i — вероятность любому инвидууму оказаться в i-й выборке. p_1 и p_s оценены быть не могут. Аналогично I находятся выражения для дисперсии и ковариации всех оценок, а также исследуется вопрос о зависимости между усилием, затраченным на получение выборки, и полученной информацией об объеме популяции. М. А. Куликов

10 В65. Предельное поведение распределений статистических критериев. Wegmüller Walter. Das Grenzverhalten statistischer Prüfverteilungen. «Mitt. Verein. schweiz. Versicherungsmathematiker», 1958, **58**, № 2, 127—150 (нем.)

Рассматриваются следующие четыре типа распределений, наиболее часто встречающихся в статистике: нормальное распределение, распределение χ^2 Пирсона, t-распределение Стьюдента и F-распределение Фишера. Для каждого из этих распределений приводятся выражения плотностей вероятностей, функций распределения, вероятностных функций (т. е. вероятностей того, что величина примет значение, большее заданного) и характеристических функций. Основное внимание автор уделил изучению предельного поведения χ^2, t и F-распределений. Подробно доказывается, что при росте числа степеней свободы у χ^2 и t распределений до бесконечности они сходятся к нормальному распределению; также показана такая сходимость и для двупараметрического распределения F, если один параметр фиксирован, а другой устремляется к бесконечности. Для распределения χ^2 приведено сравнение полученного результата с известными результатами Фишера и Вильсона — Хилферти. В. М. Волков

10 В66. Неполные достаточные статистики и подобные критерии. Wijsman Robert A. Incomplete sufficient statistics and similar tests. «Ann. Math. Statistics», 1958, **29**, № 4, 1028—1045 (англ.)

Проверяется гипотеза H относительно принадлежности параметра θ некоторому множеству ω. Пусть T — достаточная статистика для ω, имеющая плотность распределения

$$p_\theta(t) = c(\theta) \exp\left[\sum_{i=1}^{m} s_i(\theta)\, t_i\right] h(t),$$

где $t=(t_1, \ldots, t_m)$ и $s_1, \ldots, s_m$ — действительные функции, $h(t)$ — функция, удовлетворяющая некоторым условиям. Устанавливается метод, называемый D-методом, с помощью которого конструируются подобные критерии для проверки гипотезы H. Доказывается теорема, указывающая, при каких условиях статистика T является ограниченно неполной (т. е. существует ненулевая ограниченная функция $g(t)$, такая, что математическое ожидание $E_\theta g(T) \equiv 0$ для $\theta \in \omega$). Приводятся два примера применения D-метода: а) Проблема Беренса—Фишера. б) Проблема проверки гипотезы относительно отношения среднего к стандартному отклонению нормальной совокупности. В случае второго примера показывается,

что D-метод позволяет получить целый класс подобных критериев. В заключение приводятся некоторые замечания относительно нахождения оптимальных подобных критериев. С. Х. Туманян

10 В67. О неравенстве Фреше — Крамера. Schutzenberger Marcel Paul. A propos de l'inégalité de fréchetcramer. «Publs Inst. Statist. Univ. Paris», 1958, **7**, № 3-4, 3—6 (франц.)

Пусть $x(z)$ — оценка параметра x по наблюденному значению вектора $z=(y_1,\ldots,y_N)$, где $y_1,\ldots,y_N$ — независимые случайные величины, и условная (при условии x) плотность вероятности для y_k $(k=1,\ldots,N)$ равна $g(y|x)$, а $f(x)$ — априорная плотность вероятности x. При некоторых ограничениях на эти функции в статье доказано неравенство

$$M\{x-x(z)\}^2 \geqslant \frac{1}{F+NG}, \qquad (1)$$

где $F=M[f'(x)/f(x)]^2$; $G=M[g'_x(y|x)/g(y|x)]^2$. Сформулированы условия, при которых (1) переходит в равенство. Разобран конкретный пример (y_k есть сумма неслучайной функции $a(x)$ и «шума», не зависящего от x). Р. Ф. Матвеев

10 В68. Рассмотрение смещенной оценки в обстановке информационной выборки. Chambers John C. Consideration of a biased estimate in an information — sampling situation. «Operat. Res.», 1958, **6**, № 5, 729—739 (англ.)

Для получения оценки реальных размеров объектов некоторой совокупности измеряют какие-либо n ее представителей. Дисперсия измерений $h(t)$ зависит от времени t, затраченного на отдельное измерение. Потеря из-за несовпадения оценки, полученной по выборке с истинным средним размером объектов, предполагается зависящей от величины и знака полученной погрешности (несимметричный случай) и потому является случайной величиной. Общая сумма расходов, складывающихся из издержек на производство измерений $g(n, t)$ и математического ожидания потерь из-за ошибок измерений, если в качестве оценки использовать оценку со смещением β, равна

$$K=g(n,t)+\int_{-\infty}^{\beta} f_1(x-\beta)\sqrt{\frac{n}{2\pi h(t)}}\exp\left(-\frac{nx^2}{2h(t)}\right)dx+$$

$$+\int_{\beta}^{\infty} f_2(x-\beta)\sqrt{\frac{n}{2\pi h(t)}}\exp\left(-\frac{nx^2}{2h(t)}\right)dx,$$

где $f_1(x-\beta)$ и $f_2(x-\beta)$ — потери из-за положительной и соответственно отрицательной погрешностей. Требуется выбрать параметры β, t и n, чтобы минимизировать оценки K. В качестве приближенного метода решения предлагается следующий: определить оптимальные t_0 и n_0 при $\beta=0$, определить оптимальные t_1 и β_1 при $n=n_0$, определить оптимальные n_2 и β_2 при $t=t_0$ и принять в качестве оптимального решения

$$n^*=\frac{1}{2}(n_0+n_2),\ t^*=\frac{1}{2}(t_0+t_1)\ \text{и}\ \beta^*=\frac{1}{2}(\beta_1+\beta_2).$$

Рассматривается далее частный случай

$$f_1(x)=ax^2,\ f_2(x)=bx^2,\ h(t)=A-Bt,\ t_1\leqslant t\leqslant t_2.$$

Приводится численный пример. Б. В. Финкельштейн

10 В69. Экспериментальное исследование надежности некоторых процедур оценки средних и коэффициентов регрессии. Champernowne D. G. An experimental investigation of the robustness of certain procedures for estimating means and regression coefficients. «J. Roy. Statist. Soc.», 1960, **A123**, № 4, 398—412 (англ.)

Описывается исследование при помощи моделирования на вычислительной машине ошибочных заключений, которые можно сделать из некритического употребления ортодоксальных процедур оценки средних и коэффициентов регрессии, когда основные условия, требуемые теорией, так или иначе не удовлетворены. По резюме автора

10 В70. Оценка параметров распределения статистиками, основанными на упорядоченной выборке. Fidelis E., Zieliński R. Szacowanie parametrów rozkładu za pomocą statystyk z próbki uporządkowanej, «Zastosow. mat.», 1960, **5**, № 2, 149—154 (польск.; рез. русск., англ.)

Предлагаются некоторые оценки параметров непрерывного двухпараметрического распределения, основанные на упорядоченной выборке. В качестве оценок используются некоторые функции средних из элементов меньших и больших медианы. Теоретические рассмотрения иллюстрируются примером вычисления оценок для параметров прямоугольного и нормального распределений. Резюме автора

10 В71. Эффективность внутренней регрессии при подборе экспоненциальной регрессии. Hartley H. O. The efficiency of internal regression for the fitting of the exponential regression. «Biometrika», 1959, **46**, № 3—4, 293—295 (англ.)

Работа посвящена полемике с Д. Фини, выступившим с критикой (РЖМат, 1960, 2004) метода оценки параметров α, β и ρ в уравнении регрессии $y=\alpha+\beta\rho^x$, предложенного автором в 1948 г. Защищая свой метод, автор ссылается на работу Паттерсона (РЖМат, 1960, 7983), в которой этот метод достаточно подробно изучался. Автор утверждает, что сам Фини использовал его (Хартли) метод, ознакомившись с ним по вышеупомянутой работе Паттерсона. Ю. П. Студнев

10 В72. Поправка к смещению, порождаемому преобразованием переменных. Neyman Jerzy, Scott Elizabeth L. Correction for bias introduced by a transformation of variables. «Ann. Math. Statistics», 1960, **31**, № 3, 643—655 (англ.)

Рассматриваются нормальная случайная величина ξ и случайная величина η, связанные равенством $\eta=f(\xi)$, где f — строго возрастающая целая функция порядка 2. Автор строит несмещенную оценку для $\theta=E\eta$ с минимальной дисперсией. Разбираются примеры, в том числе приложения к дисперсионному и регрессионному анализу. М. Г. Шур

10 В73. Об асимптотическом распределении обобщенных линейных оценок. Basmann R. L. On the asymptotic distribution of generalized linear estimators. «Econometrica», 1960, **28**, № 1, 97—107 (англ.)

Дается строгое доказательство асимптотической нормальности обобщенных линейных оценок параметров структурных уравнений, рассмотренных автором ранее (РЖМат, 1961, 4В54). С. С. Кислицын

10 В74. Задачи эффективности полиномиальной оценки. Hoel Paul G. Efficiency problems in polynomial estimation. «Ann. Math. Statistics», 1958, **29**, № 4, 1134—1145 (англ.)

Классическая теория регрессии рассматривает вопрос о наилучшей оценке коэффициентов β_j в выражении $E(y_i)=\beta_0+\beta_1x_i+\beta_2x_i^2+\ldots+\beta_kx_i^k$ в предположении, что $y_1, y_2, \ldots, y_n$, соответствующие выбранным значениям $x=x_1, x_2, \ldots, x_n$, — некоррелированные случайные величины с общей дисперсией σ^2. В качестве меры эффективности системы оценок параметров β_i берется объем эллипсоида, заданного матрицей ковариаций их совместного распределения. Исследуется зависимость эффективности от числа точек x_i и числа наблюдений в каждой точке. Результаты обобщаются на слу-

чай, когда y_i коррелированы (предполагается, что они имеют корреляционные функции вида $e^{-a|x_i-x_j|}$ или $ae^{-b|x_i-x_0|}$ $[e^{b(x_i-x_0)}-1]$; (второй случай дает корреляционную функцию марковского процесса рождения).

Ю. А. Веретенников

10 В75. Об оценке параметров, ограниченных неравенствами. Brunk H. D. On the estimation of parameters retricted by inequalities. «Ann. Math. Statistics», 1958, 29, № 2, 437—454 (англ.)

Пусть функция $G(y)$ векторного аргумента y полунепрерывна снизу и удовлетворяет в своей (выпуклой) области определения неравенству $G[\lambda y'+(1-\lambda)y''] \leqslant \max[G(y'), G(y'')]$, $0<\lambda<1$. Предлагается способ нахождения условного минимума такой функции при условии, что

$$y \in A_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap A_N, \qquad (1)$$

где все A_i — замкнутые выпуклые множества; он может оказаться полезным при нахождении оценок максимального правдоподобия параметров, значения которых заведомо лежат в об асти вида (1). Если семейство распределений является многомерным экспоненциальным, а параметр $\tau \in S_0$, где S_0 — область, ограниченная гиперплоскостями, то оценка максимального правдоподобия $\hat{\tau}$ обладает следующим свойством, аналогичным достаточности: 1. Существует такой вариант определения $P_\tau\{E \mid \hat{\tau}\}$, который не зависит от τ, когда $\hat{\tau}$ лежит строго внутри S_0 ($\hat{\tau}$ с положительной вероятностью может принимать значение на границе, поэтому обычной достаточности нет); 2. Для любой гиперплоскости W, принадлежащей границе S_0, можно определить $P_\tau\{E \mid \hat{\tau}\}$ одинаково для $\tau \in W$, когда $\hat{\tau}$ лежит строго внутри W. Рассмотрен также вопрос об оценке непрерывной неубывающей функции $\theta(t)$, $t \in (a,b)$, когда проводится по одному наблюдению над совокупностями с характеристиками $\theta(t_i)$, где $\{t_i\}$ — плотное на (a,b) множество. Построена состоятельная оценка и получено неравенство, характеризующее скорость сходимости.

А. М. Каган

10 В76. Оценка (параметров) системы уравнений, основанная на главных компонентах переменных, определенных заранее. Klöek T., Mennes L. B. M. Simultaneous equations estimation based on principal components of predetermined variables. «Econometrica», 1960, 28, № 1, 45—61 (англ.)

Пусть требуется оценить векторы β и γ, входящие в систему:

$$y = Y\gamma + X_1\beta + u,$$

где y — столбец результатов T наблюдений некоторой величины, X_1 — $T \times l$-матрица наблюдений l известных заранее величин; Y — $T \times m$-матрица значений m вспомогательных величин, u — вектор случайных ошибок. Вспомогательные переменные с помощью метода наименьших квадратов выражаются через линейную комбинацию $\lambda \geqslant m+l$ известных заранее переменных, результаты T наблюдений над которыми могут быть записаны в виде матрицы $x=(x_1x_2)$, где x_2 — $T \times (\lambda - l)$-матрица. Часто не представляется возможным использовать при оценке y все λ известных заранее переменных. В реферируемой статье рассматриваются некоторые принципы выбора подмножества этих переменных, обеспечивающие удовлетворительную оценку β и γ.

С. С. Кислицын

10 В77. Прямая регрессии, проходящая через начало координат. Turner Malcolm E. Straight line regression through the origin. «Biometrics», 1960, 16, № 3, 483—485 (англ.)

Рассматривается оценка параметра β в уравнении регрессии $E(y_x) = \beta x$ по данным независимых наблюдений, имеющих, вообще говоря, различный вес при различных значениях x. Метод наименьших квадратов приводит к известной оценке $\hat{\beta} = \sum wxy / \sum wx^2$; к тому же результату приводит метод наибольшего правдоподобия в предположении нормальности y_x при данном x. На практике часто используют добавочные предположения: 1) $w = 1$; 2) $w = \frac{1}{x^2}$; 3) $w = \frac{1}{x}$. Автор показывает, что получаемые при этих предположениях оценки $\hat{\beta}$ отвечают также некоторым гипотезам о распределении y_x.

Б. А. Власюк

10 В78. Замечания по поводу модели парных сравнений. Noether Gottfried E. Remarks about a paired comparison model. «Psychometrika», 1960, 25, № 4, 357—367 (англ.)

К одинаково распределенным случайным величинам ε_i, $i = 1, \ldots, s$, прибавляются неизвестные, подлежащие оценке постоянные величины α_i, связанные соотношением $\sum \alpha_i = 0$. Для оценки этих постоянных производятся многократные попарные сравнения выборочных значений случайных величин $X_i = \alpha_i + \varepsilon_i$. В качестве оценки для α_i предлагается $\sum_{j \neq i} d_{ij}$, где d_{ij} определяется из условия $P\{\varepsilon_i - \varepsilon_j > d_{ij}\} = p_{ij}$, а p_{ij} — отношение числа случаев, когда $X_i > X_j$ к общему числу сравнений X_i и X (которое считается не зависящим от i и j). Рассматривается зависимость оценок от функций распределения случайных величин ε_i. Предлагается мера отклонения функций распределения, приводится пример, из которого видно, что оценки мало зависят от точного вида функций распределения.

И. В. Романовский

10 В79. Замечание об оценке дисперсии. Goodman Leo A. A note on the estimation of variance. «Sankhya Indian J. Statist.», 1960, 22, № 3-4, 221—228 (англ.)

Работа посвящена отысканию статистик, которые являются наилучшими относительно различных функций риска и (либо) несмещенными по Леману (Оценка f называется несмещенной по Леману относительно функции потерь $W(\theta, f(x))$, если для каждого значения параметра θ $E_\theta\{W(\theta', f(x))\}$ минимально при $\theta' = \theta$). Приведем один из результатов: если $E_a \log \frac{x}{\theta} \equiv A$ при всех θ, то среди всех статистик вида aX, a — постоянная, служащих для оценивания θ, единственной несмещенной по Леману относительно функции потери

$$W_1[\theta, f(x)] = (\log f(x) - \log \theta)^2$$

является $e^{-A}X$; она же (в рассматриваемом классе) равномерно по θ минимизирует $E_\theta W_1[\theta, f(x)]$.

А. М. Каган

10 В80. О статистической оценке энтропии последовательности независимых случайных величин. Бакшарин Г. П. «Теория вероятностей и ее применения», 1959, 4, № 3, 361—364 (рез. англ.)

Пусть $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$ — независимые величины, принимающие s значений с вероятностями p_i. В качестве оценки энтропии $-\sum p_i \log p_i$ берется величина

$$\hat{H} = -\sum \hat{p}_i \log \hat{p}_i,$$

где $\hat{p}_i$ — эмпирические частоты. Доказывается, что $\hat{H}$ — состоятельная и асимптотически нормальная оценка. Найдены асимптотические выражения для ее среднего и дисперсии.

Р. Г. Добрушин

10 В81. Доверительные интервалы заранее заданной длины для квантилей одновершинной генеральной сово-

купности. Weiss Lionel. Confidence intervals of preassigned length for quantiles of unimodal populations. «Naval Res. Logist. Quart.», 1960, 7, № 3, 251—256 (англ.)

Предлагается следующая двухступенная процедура для оценки q-квантиля случайной величины с одновершинной плотностью $f(x)$ по независимым наблюдениям. Вначале производится выборка объема m, а затем производится дополнительная выборка, объем которой n определяется в зависимости от разности между максимальным и минимальным членами первой выборки. В качестве доверительного интервала для q-квантиля берется симметричный интервал относительно выборочного q-квантиля второй выборки. Указываются явные формулы для объемов выборок m и n, приводящих к доверительному интервалу заданной длины при заданном уровне значимости в независимости от $f(x)$. Р. Л. Добрушин

10 В82. К вопросу о группировке наблюдений. IV. Некоторые замечания о простых оценках. Gjeddebaek N. F. Contribution to the study of grouped observations. 4. Some comments on simple estimates. «Biometrics», 1959, **15**, № 3, 433—439 (англ.)

Ч. II и III см. РЖМат, 1959, 4029; 1960, 1964. Автор продолжает свои исследования оценок параметров нормальной совокупности по сгруппированным наблюдениям. В качестве оценки для среднего ξ рассматривается величина $M = 1/N \sum_{i=0}^{k} n_i \mu_i$. Для дисперсии σ^2 рассматриваются две оценки: величина

$$S_1^2 = 1/N \sum_{i=0}^{k} n_i (\mu_i - \xi)^2,$$

если ξ известно, и величина

$$S_2^2 = 1/(N-1) \sum_{i=0}^{k} n_i (\mu_i - M)^2,$$

если ξ неизвестно. Здесь n_i — число наблюдений, попавших в i-ю группу, μ_i — точка, с которой отождествляются все наблюдения этой группы, $N = \sum_{i=0}^{k} n_i$. Выписаны математические ожидания и дисперсии этих оценок, откуда видно, что, вообще говоря, эти оценки являются смещенными. В случае неизвестного ξ автор приходит к выводу, что если интервалы группировки имеют неодинаковую длину, то для оценки σ^2 следует пользоваться оценкой максимума правдоподобия. Когда интервалы группировки имеют одинаковую длину, то S_2^2 с поправкой Шеппарда практически так же эффективна, как и соответствующая оценка максимума правдоподобия. Е. А. Баваров

10 В83. Состоятельность оценки максимального правдоподобия дискретных распределений. Hannan J. Consistency of maximum likelihood estimation of discrete distributions. «Contribs Probability and Statist». Stanford, Calif., Univ. Press, 1960, 249—257 (англ.)

Пусть $\mathbf{P} = \{P\}$; $P\text{-}(p(x_1), \ldots, p(x_n), \ldots)$ — произвольное семейство распределений с конечной энтропией на одном и том же счетном множестве $(x_1, \ldots, x_n, \ldots)$. Определим асимптотическую оценку максимального правдоподобия по выборке $x_{i_1}, \ldots, x_{i_N}$ как любой элемент $P(x_{i_1}, \ldots, x_{i_N}) = P_N \in \mathbf{P}$, удовлетворяющий условию:

$$\sup_{P \in \mathbf{P}} \frac{1}{N} \sum_{s=1}^{N} \log P(x_{i_s}) - \frac{1}{N} \sum_{s=1}^{N} \log P_N(x_{i_s}) \to 0$$

при $N \to \infty$. Доказано, что с вероятностью 1

$$\sum_{i=1}^{\infty} | P_N(x_i) - P(x_i) | \to 0,$$

где P — истинное распределение. Приведем пример, показывающий, что это утверждение перестает быть верным, если отказаться от требования конечности энтропии. А. М. Каган

10 В84. Допустимые области для нормального распределения с известным μ и неизвестным σ. Jílek M., Likař O. Tolerance regions of the normal distribution with known μ, unkown σ. «Biometr. Z.», 1960, **2**, № 3, 204—209 (англ.)

Приведены таблицы для определения множителя K, необходимого для нахождения допустимых областей для нормального распределения, при этом математическое ожидание предполагается известным. Таблицы коэффициентов даются для объемов выборок $n=3$ (1) 20 (5) 50 (10) 100, 120, 150, 200 (50) 300 (100) 1000, 1200, 1500, 2000, 5000, 10 000 в зависимости от пропорции вероятностной массы $\gamma = 0{,}80$; 0,90; 0,95; 0,98; 0,99; 0,998, заключенной между этими границами с вероятностями $\beta = 0{,}90$; 0,95; 0,99; 0,999. Е. С. Кочетков

10 В85. Об условных ожиданиях статистик положения. Hogg Robert V. On conditional expectations of location statistics. «J. Amer. Statist. Assoc.», 1960, **55**, № 292, 714—717 (англ.)

Пусть ξ_i — одинаково распределенные независимые случайной величины. Пусть $f(x_1, \ldots, x_n)$ — функция, определенная в n-мерном евклидовом пространстве. Статистика $f(\xi_1, \ldots, \xi_n)$ называется нечетной статистикой положения, если $f(x_1 + h, \ldots, x_n + h) \equiv f(x_1, \ldots, x_n) + h$ и $f(-x_1, \ldots, -x_n) \equiv -f(x_1, \ldots, x_n)$, и четной и не зависящей от смещения, если $f(x_1 + h, \ldots, x_n + h) \equiv f(x_1, \ldots, x_n)$ и $f(-x_1, \ldots, -x_n) = f(x_1, \ldots, x_n)$. Оказывается, что если величины ξ распределены симметрично относительно точки θ и если существует математическое ожидание некоторой нечетной статистики положения $f(\xi_1, \ldots, \xi_n)$, то ее условное математическое ожидание при любой заданной четной статистике, не зависящей от смещения, равно θ (почти наверное). Если величины η_1 и η_2 являются функциями от некоторых четных статистик, не зависящих от смещения, и $\eta_1 + \eta_2 = 1$, то статистика $\xi_1\eta_1 + \xi_2\eta_2$ является несмещенной оценкой для θ (здесь ξ_1 и ξ_2 — две нечетные статистики положения). М. Г. Шур

10 В86. Обобщение теоремы Питмена — Купмена. Jeffreys Harold. An extension of the Pitman — Koopman theorem. «Proc. Cambridge Philos. Soc.», 1960, **56**, № 4, 393—395 (англ.)

Теорема Питмена — Купмена с формулировкой: плотность распределения $f(x, \alpha)$, $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)$, допускающего достаточные статистики для параметров α_l при дополнительном условии существования $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial \alpha_l}$, имеет вид

$$\Phi(\alpha) \cdot \psi(x) \cdot \exp \sum_s u_s(\alpha) \cdot v_s(x)$$

— обобщается на случай, когда x или α_l, или x и α_l принимают только дискретные значения, т. е. когда требование существования производных по x или α_l теряет смысл. Плотность в этом случае заменяется вероятностью. Ю. И. Медведев

10 В87. Оценка в усеченном пуассоновском распределении, когда нули и некоторые единицы отсутствуют. Cohen A. Clifford, Jr. Estimation in the truncated Poisson distribution when zeros and some ones are missing. «J. Amer. Statist. Assoc.», 1960, **55**, № 290, 342—348 (англ.)

Рассматривается распределение вероятностей

$$P(x;\lambda,\theta)=\begin{cases}0, & x=0,\\ \dfrac{(1-\theta)\,e^{-\lambda}\lambda}{1-e^{-\lambda}(1+\theta\lambda)}, & x=1,\\ \dfrac{e^{-\lambda}\lambda^{x}}{1-e^{-\lambda}(1-\theta\lambda)\,x!}, & x=2,3\ldots,\end{cases}$$

где λ — пауссоновский параметр ($\lambda>0$), θ — доля ненаблюденных опытов, исход которых $x=1$ ($0\leqslant\theta\leqslant 1$). Когда $\theta=0$, то $p(x;\lambda,\theta)$ — усеченное пауссоновское распределение с исключенными нулями, а при $\theta=1$, $p(x,\lambda,\theta)$ — распределение с исключенными нулями и единицами. В статье дается оценка максимального правдоподобия для параметров λ и θ распределения $p(x;\lambda,\theta)$. Приводятся таблицы и графики, облегчающие вычисление этих оценок, а также асимптотические выражения для дисперсии и ковариации этих оценок. На примере показывается применение полученных формул.

М. К. Камалов

10 В88. Коэффициенты для определения односторонних толерантных пределов нормального распределения. Jílek Miloš, Likař Otakar. Coefficients for the determination of one — sided tolerance limits of normal distribution. «Ann. Inst. Statist. Math.», 1959, **11**, № 1, 45—48 (англ.)

Пусть дана случайная выборка $x_1, x_2, \ldots, x_n$ объема n из нормальной генеральной совокупности $N(\mu,\sigma^2)$ с неизвестными параметрами μ и σ. Известно, что односторонние толерантные пределы T_U и T_L (верхний и нижний) гарантируют покрытие интервалами $(-\infty, T_U)$ или (T_L,∞) не менее чем α-й доли генеральной совокупности с вероятностью P, если $T_U=\bar{x}+ks$ или $T_L=\bar{x}-ks$, причем $\bar{x}$ и s^2 — эмпирические среднее и дисперсия, а

$$k=\frac{1}{\sqrt{n}}\,t(n-1,\ u_\alpha\sqrt{n},\ 1-P).$$

Здесь $t(f,\delta,\varepsilon)$ является ε-квантилью нецентрального t-распределения с f степенями свободы и параметром нецентральности δ и u_α является α-кванталью нормального распределения $N(0,1)$. В работе приводится таблица значений коэффициента k для $n=5(1)\ 20(5)\ 100(100)\ 300,\ 500,\ 1000$, $P=0{,}90;\ 0{,}95;\ 0{,}99$ и $\alpha=0{,}90;\ 0{,}95;\ 0{,}99$.

Б. Ш. Флейшман

10 В89. О классе решающих процедур для упорядочивания нормальных распределений по их дисперсиям. Kapur M. N. On a class of decision procedures for ranking normal populations according to their variances. «J. Indian Soc. Agric. Statist.», 1958, **10**, № 1-2, 99—106 (англ.)

Пусть $\pi_i=N(\mu_i,\sigma_i)$, $i=0,1,\ldots,k$, — нормальные распределения со средними μ_i и дисперсиями σ_i^2. Требуется на основании случайной выборки, полученной для каждого из $(k+1)$ рассматриваемых распределений, разделить эти распределения на две группы I и II так, чтобы группа I содержала распределение с наибольшей дисперсией и имела по возможности небольшой объем. Пусть $\bar{x}_i$ и s — выборочные среднее и дисперсия соответственно для распределения π_i. Определим класс решающих процедур D следующим образом. Отнесем распределение π_0 к группе II, если

$$\sum_{i=1}^{k}\frac{c_i s_i^2}{s_0^2}>F_\alpha^{c_1,\ldots,c_k},$$

и к группе I в противном случае. Здесь $c_i\geqslant 0$, $\sum_{i=1}^{k}c_i=1$; $s^2_{(1)}>\ldots>s^2_{(k)}$ — упорядоченные s_i^2, а $F_\alpha^{c_1,\ldots,c_k}$ означает верхнюю $100\,\alpha\%$ точку для распределения величины

$$F(c_1,\ldots,c_k)=\sum_{i=1}^{k}\frac{c_i s^2_{(i)}}{s_0^2}$$

в предположении равенства σ_i, $i=0,1,\ldots,k$. Для π_i процедура определяется аналогично. Показывается, что класс D обладает следующими свойствами. Свойством несмещенности: вероятность попасть в группу II для каждого распределения не меньше, чем для распределения с наибольшей дисперсией. Свойством градации: для каждого γ ($0>\gamma<1$) существует постоянная $\sigma^2_{0\gamma}$ такая, что вероятность попасть в группу II для распределения с дисперсией σ^2_0 больше или меньше, чем γ, если σ_0^2 соответственно больше или меньше $\sigma^2_{0\gamma}$. В частном случае, когда среди $(k+1)$ рассматриваемых распределений все, кроме одного, имеют одинаковые дисперсии σ^2, процедура d из класса D, определяемая $c_i=\frac{1}{k}$, $i=1,\ldots,k$, является оптимальной в том смысле, что она: а) максимизирует вероятность попадания в группу I распределения с дисперсией $\sigma_1^2\neq\sigma^2$, если $\sigma_1^2>\sigma^2$; б) максимизирует вероятность попадания в группу II распределения с дисперсией $\sigma_1^2\neq\sigma^2$, если $\sigma_1^2<\sigma^2$.

Л. Я. Савельев

10 В90. Таблицы множителей для нахождения толерантных пределов для нормальных распределений. Weissberg Alfred, Beatty Glenn H. Tables of tolerance — limit factors for normal distributions. «Technometrics», 1960, 2, № 4, 483—500 (англ.)

Двусторонние симметричные толерантные пределы для нормальной генеральной совокупности с выборочным средним $\bar{x}$ и стандартным отклонением s имеют вид $x\pm Ks$. Множитель K, зависящий от доли P генеральной совокупности, попадающей в толерантный интервал, и уровня значимости γ, можно рассматривать как произведение двух величин r и u. Первая величина находится из уравнения

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{N^{-1/2}-r}^{N^{1/2}+r}e^{-t^2/2}\,dt=P,$$

где N — объем выборки. Вторая величина определяется по формуле $u=\left(f/\chi^2_{f\gamma}\right)^{1/2}$, где $\chi^2_{f\gamma}$ — находится из условия $P\left(\chi^2_f>\chi^2_{f\gamma}\right)=\gamma$, а f — число степеней свободы, связанное с s. Составлены таблицы величин $r=r(N,P)$ и $u=u(f,\gamma)$. Таблицы значений r приведены при $P=0{,}50;\ 0{,}75;\ 0{,}90;\ 0{,}95;\ 0{,}99;\ 0{,}999$ для N от 1 до 100; от 105 до 200 с шагом 5; от 210 до 300 с шагом 10; от 320 до 500 с шагом 20; от 600 до 1000 с шагом 100, а также для $N=2000,\ 3000,\ 5000,\ 10000$ и ∞. Таблицы значений u приведены при $\gamma=0{,}90;\ 0{,}95;\ 0{,}99$ для f от 1 до 150; от 152 до 250 с шагом 2; от 255 до 500 с шагом 5; от 510 до 800 с шагом 10; от 820 до 1000 с шагом 20; 2000 до 10000 с шагом 1000 и для $f=\infty$. Показано, как можно использовать эти таблицы для построения односторонних толерантных пределов. Рассмотрены примеры.

Е. С. Кочетков

10 В91. Толерантные пределы, основанные на данных по испытании долговечности, для экспоненциальных рас-

пределений. Epstein Benjamin. Tolerance limits based on life test data taken from an exponential distribution, «Industr. Qual. Control», 1960, **17**, № 2, 10—11 (англ.)

На основе r наблюдений независимых величин с экспоненциальным распределением строится толерантный предел $K(r, p, \alpha)$ такой, что с вероятностью ошибки α вероятность того, что время жизни изделия превосходит K, равна p; приводятся таблицы для K (r, p, α) при r=1, 2,..., 10, 20, 25, 30, 40, 50, 75, 100; P=0,50; 0,75, 0,90; 0,95; 0,99, α=0,011; 0,05; 0,1; 0,2; 0,25; 0,5.

Р. Л. Добрушин

10 В92. Уровень значимости и мощность. Lehmann E. L. Significance level and power. «Ann. Math. Statistics», 1958, **29**, № 4, 1167—1176 (англ.)

Рассматривается многопараметрическое экспоненциальное семейство распределений с плотностью

$$P_{\theta\vartheta} = C(\theta, \vartheta) \exp\left[\theta U(x) \sum_{i=1}^{r} \vartheta_i T_i(x)\right] h(x)$$

по отношению к σ-конечной мере μ, где $\theta, U, \vartheta_i, T_i$ — действительны, $\vartheta = (\vartheta_1, \ldots, \vartheta_r)$. В этом семействе статистики U и $T = (T_1, \ldots, T_r)$ образуют семейство достаточных статистик для θ, ϑ. Показывается, что критерий, в которых первая гипотеза принимается с вероятностью 1 при $U > C(T)$, $\gamma(T)$ при $U = C(T)$ и 0 при $U < C(T)$, где $\gamma(t)$, $C(t)$ — некоторые надлежаще определяемые функции, образуют минимальный полный класс критериев для проверки гипотезы $H: \theta < \theta_0$ против альтернативы $\theta > \theta_0$. Затем исследуются вопросы о разумном совместном выборе α и β — ошибок первого и второго рода, в частности, в случае указанного выше семейства распределений. Приведен ряд примеров.

С. Х. Туманян

10 В93. Оптимальные инвариантные критерии. Lehmann E. L. Optimum invariant tests. «Ann. Math. Statistics», 1959, **30**, № 4, 881—884 (англ.)

Пусть X — случайная величина и $P = \{P_\theta, \theta \in \Omega\}$ — класс возможных функций распределения X. Рассмотрим гипотезу H, состоящую в том, что $\theta \in \omega \subset \Omega$. Предположим, что задача проверки гипотезы H относительно альтернативы, состоящей в том, что $\theta \in \Omega - \omega$, остается инвариантной при группе преобразований G выборочного пространства. Известно, что критерий проверки линейной гипотезы относительно средних нормального распределения обладает рядом различных оптимальных свойств. В статье показывается, что эти свойства суть следствия того факта, что рассматриваемый критерий является равномерно наиболее мощным и инвариантным относительно некоторой группы преобразований и для всех таких критериев может быть получен широкий класс оптимальных свойств.

К. П. Латышев

10 В94. Некоторые упрощения при конструировании подобных областей. Chanda K. C. On some simplification in the construction of similar regions. «Calcutta Statist. Assoc. Bull.», 1959, **8**, № 32, 159—161 (англ.)

Рассматривается задача проверки сложной нулевой гипотезы $H_0: \theta_i = \theta_i^0 \ (p+1 \leqslant i \leqslant p+k)$ против сложной альтернативы $H: \theta_i \neq \theta_i^0 \ (p+1 \leqslant p < p+k)$, где $\theta_i \ (i = 1, 2, \ldots, p+k)$ — неизвестные параметры. Указывается на возможность дать в одном частном случае более эффективное построение наиболее мощного подобного критерия (Neyman J., Ann. Math. Statistics, 1941, **12**, 46).

Р. Л. Добрушин

10 В95. О минимаксных критериях проверки гипотез. Sakaguchi Minoru. On minimax tests of hypotheses. «Repts Statist. Applic. Res. Union Japan Scientists and Engrs», 1955, **3**, № 4, 130—139 (англ.)

Пусть Ω — семейство функций распределения, состоящее из двух непересекающихся подсемейств ω_i $(i=0; 1)$, и производится выборка с целью определения, подчинена ли случайная величина X функции распределения $F \in \omega_0$ или $F \in \omega_1$. Пусть критерий задает решающая функция, принимающая два значения d_0 и d_1. Пусть, далее, функция потерь

$$W(F, d_0) = \begin{cases} 0, & \text{если } F \in \omega_0, \\ W(F), & \text{если } F \in \omega_1, \end{cases}$$

где $W(F)$ — неотрицательная функция на ω,

$$W(F, d_1) = \begin{cases} 1, & \text{если } F \in \omega_0, \\ 0, & \text{если } F \in \omega_1 \end{cases}$$

и

$$r(F, \Phi) = E_F W(F, \Phi(x)).$$

Требуется отыскать критерий, удовлетворяющий условиям $r(F, \Phi) \leqslant \alpha$, если $F \in \omega_0$, и минимизирующий $\sup_{F \in \omega_1} r(F, \Phi)$. Доказывается, что если δ_0 — байесовское решение, соответствующее априорному распределению ξ_0 и если

$$\xi_0(\{F \mid r(F, \delta_0) = \sup_{F \in \omega_i} r(F, \delta_0)\} \cap \omega_i) = \xi_0(\omega_i) \quad (i = 0, 1),$$

$$0 < \xi_0(\omega_0) < 1 \quad \text{и} \quad \sup_{F \in \omega_1} r(F, \delta_0) = \alpha,$$

то δ_0 является искомым критерием. Указывается также обобщение этого результата на случай, когда не существует такого распределения ξ_0. Это обобщение позволяет получать искомый критерий, как некоторый предел байесовских решений с асимптотически почти постоянными значениями риска на ω_0 и ω_1. Приведено три примера, относящиеся к проверке гипотез о параметрах нормального распределения.

Б. В. Финкельштейн

10 В96. О смешанных одновыборочных экспериментах. Cohen Leonard. On mixed single sample experiments. «Ann. Math. Statistics», 1958, **29**, № 4, 947—971 (англ.)

Рассматриваются критерии для проверки простой гипотезы против простой альтернативы, имеющие оперативную характеристику (α, β, n), где α — вероятность ошибки первого рода, β — вероятность ошибки второго рода, n — фиксированный размер выборки. Смешанный одновыборочный критерий определяется посредством последовательности $(\gamma_i, \alpha_i, \beta_i, n_i)$, где $\gamma_i \geqslant 0$, $\sum_{i=1}^{\infty} \gamma_i = 1$, причем γ_i интерпретируется как вероятность использования критерия (α_i, β_i, n_i). Оперативной характеристикой смешанного одностороннего выборочного критерия является

$$(\alpha, \beta, n) = \sum_{i=1}^{\infty} \gamma_i (\alpha_i, \beta_i, n_i).$$

Рассматривается класс a всех смешанных одновыборочных критериев. Доказывается, что этот класс является полным, т. е. если некоторый критерий (α', β', n') не принадлежит классу a, то в этом классе найдется такой критерий (α, β, n), что $\alpha \leqslant \alpha'$, $\beta \leqslant \beta'$, $n \leqslant n'$, причем одно из этих неравенств строгое. Дается способ конструирования критериев (α, β, n), принадлежащих указанному классу. Развитая теория применяется далее к конкретным задачам, среди которых:

а) Задача проверки гипотезы $H_0: \theta = \theta_0$ против альтернативы $H_1: \theta = \theta_1$, $\theta_0 < \theta_1$, в случае, когда параметр θ есть среднее значение нормального распределения, дисперсия которого неизвестна.

б) Задача о проверке той же гипотезы, но в случае, когда θ есть среднее значение биномального распределения.

в) Задача о проверке гипотезы $H_0:\theta=\theta_0$ против альтернативы $H_1:\theta=\theta_1$, $\theta_1>\theta_0$, в случае, когда θ есть параметр равномерного распределения на отрезке $[0, \theta]$.

г) Пусть

$$f(x,\theta)=\begin{cases}1, & \theta<x<\theta+1,\\ 0, & \text{в противном случае.}\end{cases}$$

Испытывается гипотеза $H_0:\theta=0$ против альтернативы $\theta=\theta_1$ при $0<\theta_1<1$. Приведенная теория распространяется и на другие проблемы, в частности проблему построения доверительных интервалов для неизвестного параметра. При этом за основу берется характеристика $(1-\alpha, L, n)$, где $1-\alpha$—вероятность того, что доверительный интервал не покроет неизвестное значение параметра, L — длина доверительного интервала, а n— объем выборки. Рассматривается также проблема проверки гипотезы в случае k возможных значений параметра и некоторые другие. С. Х. Туманян

10 В97. Сходимость эмпирического распределения к теоретическому. Badrikian Albert. Convergence de la répartition empirique vers la répartition théorique. «C. r. Acad. sci.», 1960, **250**, № 10, 1789 (франц.)

Формулируется теорема о сходимости эмпирического распределения, построенного по независимым наблюдениям случайного элемента со значениями в локально компактном топологическом пространстве, к теоретическому. Случай метрических пространств был ранее разобран Варадараджаном (РЖМат, 1960, 658).

Ю. В. Прохоров

ТЕОРИЯ ИГР, ИССЛЕДОВАНИЕ ОПЕРАЦИЙ И МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ЭКОНОМИКА

Редактор *Н. Н. Воробьев*

10 В98. Точки равновесия в конечных играх. Mills Harlan. Equilibrium points in finite games. «J. Soc. Industr. and Appl. Math.», 1960, **8**, № 2, 397—402 (англ.)

Рассматриваются бескоалиционные игры n лиц.

Теорема 1_n. Для того чтобы ситуация $\pi=(\pi_1,\ldots,\pi_n)$ была ситуацией равновесия в смысле Наша, необходимо и достаточно существование такого вектора $\alpha=(\alpha_1,\ldots,\alpha_n)$, что

$$H_i\left(\pi\mid\pi_i'\right)\leqslant\alpha_i,\quad\sum_k H_k(\pi)=\sum_k\alpha_k,$$

где H_i — выигрыш игрока i, а π_i, π_i' — его стратегии.

Теорема 2_n. Для того чтобы π была ситуацией равновесия, необходимо и достаточно, чтобы (π, α) было решением задачи максимизации

$$\sum_k\left(H_k(\pi)-\alpha_k\right)$$

при условиях

$$H_i\left(\pi\mid\pi_i'\right)\leqslant\alpha_i \text{ для всех } i.$$

Отмечается, что частным случаем этих теорем является теорема об эквивалентности решения матричной игры задаче линейного программирования.

И. В. Романовский

10 В99. Игры, решения и промышленная организация. Shubik M. Games decisions and industrial organization. «Manag. Sci.», 1960, **6**, № 4, 455—474 (англ.)

Рассчитанное на неподготовленного читателя изложение основных понятий и методов теории игр, в том числе: игра двух лиц с постоянной суммой, позиционные игры, игры n лиц (различные подходы к их решению), игры против природы, динамические игры.

И. В. Романовский

10 В100. Класс простых игр. Isbell J. R. A class of simple games. «Duke Math J.», 1958, **25**, № 3, 423—439 (англ.)

Вводится понятие псевдоигры: рассматривается система из N входов и 1-го выхода; каждый вход и выход имеет два состояния: возбуждения и невозбуждения. Рассматривается состояние на выходе в зависимости от общего состояния входов. Множество входов S называется выигрывающим множеством, если на выходе имеется возбуждение, когда возбуждены эти S входов и только они. Вводится аксиома, состоящая в том, что каждое множество, содержащее выигрывающее множество, должно быть выигрывающим. Псевдоигра называется простой, если любые два выигрывающих множества пересекаются. Для игры n лиц определяется игра n—1 лиц, называемая ее редукцией. Игры, не имеющие редукций, называются нередуктивными. Дается полная классификация таких игр. Доказывается ряд теорем относительно их структуры. Приводятся новые доказательства некоторых уже известных теорем, в том числе теоремы Гурка и автора (РЖМат, 1960, 11907) о числе минимальных выигрывающих множеств. О. Н. Бондарева

10 В101. Перечисление мажоритарных игр. Isbell John R. On the enumeration of majority games. «Math. Tables and Other Aids Comput.», 1959, **13**, № 65, 21—28 (англ.)

Рассматриваются мажоритарные игры, т. е. такие строго простые игры, в которых каждому игроку ставится в соответствие некоторый вес ω_i, так что любая выигрывающая коалиция имеет сумму весов большую, чем половина суммы всех весов. Если в качестве весов рассматривать систему, состоящую из наименьших целых положительных чисел, то такое представление для каждой игры будет единственным. Рассматривается метод перечисления всех мажоритарных игр, заключающийся в определении игры с весами $(\omega_0, \omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_n)$ через системы $(\omega_0+\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_n)$ и $(\omega_0-\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_n)$. Дается перечисление всех мажоритарных игр 7 лиц (мажоритарные игры меньшего числа игроков уже были перечислены ранее); их оказывается 114.

О. Н. Бондарева

10 В102. Теория инвариантности и модифицированный принцип минимакса. Wesler Oscar. Invariance theory and a modified minimax principle. «Ann. Math. Statistics», 1959, **30**, № 1, 1—20 (англ.)

Рассматривается применительно к статистическим играм новый принцип минимакса, который применяется к таким играм, в которых игрок-статистик частично осведомлен о стратегиях игрока-природы. Теоретико-игровая постановка задачи такова: игрок должен выбрать свою стратегию, зная, что другой игрок с вероятностью p_i выберет стратегию из множества A_i. Изучается связь этого принципа с принципом инвариантности в испытании гипотез (РЖМат, 1956, 4716К). И. В. Романовский

10 В103. Теория оптимальных игр. Ross Alan S. C. Theory of optimal games. «Nature» (Engl.), 1960, **187**, № 4741, 968 (англ.)

Небольшая популярная заметка о теории игр.

10 В104. Параметрическое программирование и алгорифм для одновременного решения прямой и двойственной задач. Kelley J. E., Jr. Parametric programming and the primal—dual algorithm. «Operat. Res.», 1959, **7**, № 3, 327—334 (англ.)

Изучаются свойства решения параметрической задачи линейного программирования. Показано, что метод решения параметрической задачи (РЖМат, 1959, 11343) эквивалентен методу одновременного решения прямой и двойственной задач линейного программирования

(РЖМат, 1958, 581). В качестве примера рассматривается следующая транспортная задача: минимизировать

$$\sum_{ij} c_{ij}x_{ij} + L\left(\sum_i u_i + \sum_j v_j\right)$$

при условиях $x_{ij} \geqslant 0$,

$$u_i \geqslant 0,\ v_j \geqslant 0\ \sum_j x_{ij} + u_i = a_i,\quad \sum_i x_{ij} + v_j = b_j,$$

L — параметр. Оказывается, существует некоторое значение $L = L_0$, для которого в оптимальном решении $u_i = v_j = 0$ при всех i, j. Л. И. Горьков

10 В105. Использование двойственности. Matthys Gaston. Une application de la dualité. «C. r. Acad. sci.», 1960, **250**, № 16, 2794—2795 (франц.)

Весьма компактная запись перехода от прямой и двойственной задач при алгорифме их одновременного решения (РЖМат, 1958, 581) к суженным задачам. Кратко доказывается требуемая эквивалентность решений. И. В. Романовский

10 В106. Нахождение первого базисного решения в линейном программировании. Geißler S. Bestimmung einer ersten Basislösung beim «Linearen Programmieren». «Unternehmensforschung», 1960, **4**, № 2, 80—88 (нем.; рез. англ.)

Предлагается метод построения первого базисного решения, который во многих случаях позволяет обойтись без введения добавочных переменных. Приведен пример. А. А. Корбут

10 В107. Метод Ньютона для выпуклого программирования и Чебышевское приближение. Cheney E. W., Goldstein A. A. Newton's method for convex programming and Tchebycheff approximation. «Numer. Math.», 1959, **1**, № 5, 253—268 (англ.)

Методом Ньютона решается задача о нахождении минимума выпуклой функции, заданной на выпуклом множестве. Задачами этого типа являются решение бесконечной системы линейных неравенств («бесконечного линейного программирования»).

10 В108. Применение метода линейного программирования для решения экономических задач на автомобильном транспорте. Сетунов Ф., Чернышов Ю. «Труд и заработн. плата», 1959, № 11, 74—79

Пример решения задачи минимизации стоимости порожнего пробега автомашин. Л. Н. Куцев

10 В109. Планирование на транспорте с помощью линейного программирования. Киперенко В. «Труд и заработн. плата», 1959, № 11, 55—63

Рассматривается метод решения задачи минимизации стоимости порожних пробегов транспортных средств, применяемый в Венгрии. Л. Н. Куцев

10 В110. Решение задач линейного программирования. Arden Dean N. The solution of linear programming problems, «Math. methods digital computers.» New York—London, John Wiley & Sons, Inc., 1960, 263—279 (англ.)

10 В111. Линейное программирование. Oliver y Trujillo Alejandro. Programación lineal, «Técn. econ.», 1960, **5**, № 8, 248—249 (исп.)

Простой численный пример.

10 В112. Теорема о допустимом потоке через сеть и ее комбинаторные приложения. Fulkerson D. R. A network—flow feasibility theorem and combinatorial applications. «Canad. J. Math.», 1959, **11**, № 3, 440—451 (англ.)

Указываются условия, необходимые и достаточные для существования потока f через направленный граф G, обладающего следующими свойствами:

1. Поток $\sum_{y \in A(x)} f(x, y)$, выходящий из промежуточной вершины x, равен потоку $\sum_{y \in B(x)} f(y, x)$, в нее входящему.

2. Поток $f(x, y)$ через каждую дугу графа (x, y) не превосходит заданной пропускной способности дуги $c(x, y)$.

3. Разности входящих и выходящих потоков для источников и стоков лежат в заданных пределах, $\alpha(x)$ и $\beta(x)$ для источников ($x \in S$) и $a(x)$ и $b(x)$ для стоков ($x \in T$).

На этой основе получается теорема о необходимых и достаточных условиях существования матрицы инциденций, суммы элементов строк и столбцов которой лежат в заданных пределах (частным ее случаем является теорема Гейла—Райзера (РЖМат, 1959, 8285; 1958, 1827), а также обобщения теорем Ора (РЖМат, 1958, 4584) и Гофмана — Куна (РЖМат, 1957, 3358).

И. В. Романовский

10 В113. О кратчайшем пути через сеть. Dantzig George B. On the shortest route through a network. «Manag. Sci.», 1960, **6**, № 2, 187—190 (англ.)

На основе известной ранее идеи Мура и других (см. например, обзорную статью Поллака и Уибенсона (РЖМат, 1961, 6В69) строится алгорифм, который после $n(n-1)/2$ сравнений дает дерево кратчайших путей от «начала» графа до всех его остальных $n-1$ вершин. И. В. Романовский

10 В114. О некоторых задачах связывающих сетей. Kalaba Robert. On some communication network problems. «Proc. Sympos. Appl. Math.», 1960, **10**, 261—280 (англ.)

Обзорная статья. Рассматриваются следующие задачи:

I. Задача о связывающей сети минимальной стоимости. Заданы стоимости каждой из дуг графа, построить поддерево графа с минимальной суммарной стоимостью дуг.

II. Задача о кратчайшем пути через сеть (РЖМат, 1961, 6В69).

III. Задача о кружении (routing). Заданы пропускные способности дуг графа и размеры перевозок между пунктами. Требуется максимально выполнить план перевозок. Приводятся алгорифмы решения этих задач и некоторых их обобщений. Демонстрируется решение задачи третьего типа. Библ. 34 назв. И. В. Романовский

10 В115. О линейных проблемах, связанных с потоком через сеть. Matthys Gaston. Sul les problèmes linéaires de flot dans un réseau. «C. r. Acad. sci.», 1960, **250**, № 15, 2675—2676 (франц.)

Рассматривается транспортная сеть R, некоторый путь H от входа к выходу и дерево A, содержащее H. Доказывается, что всякий поток через R является линейной комбинацией H и базисных циклов R. Доказывается, далее, что линейная комбинация H и циклов базы порождает поток через R тогда и только тогда, если ее коэффициенты — целые неотрицательные числа, а значение потока через любое ребро A неотрицательно.

Р. Е. Кричевский

10 В116. Программирование транспортной задачи. Glicksman Stephen, Johnson Lyle, Eselson Leonard. Coding the transportation problem. «Naval Res. Logist. Quart.», 1960, **7**, № 2, 169—183 (англ.)

Рассматривается вычислительный аспект решения матричной транспортной задачи. Приводятся результаты экспериментов с программой XPORT на машине УНИВАК 1. И. В. Романовский

10 В117. Использование строчных значений при решении транспортной задачи. Niederjohn James A. The use of row values in solution of the transportation problem. «Operat. Res.», 1960, **8**, № 4, 570—572 (англ.)

Речь идет о методе потенциалов. Отмечается и использование потенциалов при варьировании параметров задачи. И. В. Романовский

10 В118. Двойственность в квадратичном программировании. Dorn W. S. Duality in quadratic program-

ming. «Quart. Appl. Math.», 1960, **18**, № 2, 155—162 (англ.)

Рассматривается задача I: минимизировать $f(x) = (1/2)x^TCx + p^Tx$ при условиях $Ax \geqslant b$, $x \geqslant 0$, где C — симметричная положительно определенная матрица, A — произвольная матрица, x, p, b — векторы. Двойственной к задаче I будет задача II: максимизировать $g(u, v) = (-1/2)u^TCu + b^Tv$ при условиях $A^Tv - Cu \leqslant p$, $v \geqslant 0$. Основным результатом является следующая теорема двойственности: Если $x = x_0$ есть решение задачи I, то существует решение $(u, v) = (x_0, v_0)$ задачи II. Обратно, если существует решение $(u, v) = (u_0, v_0)$ задачи II, то существует также и решение задачи I, удовлетворяющее условию $Cx = Cu_0$. В обоих случаях $\operatorname{Max} g(u, v) = \operatorname{Min} f(x)$. Указаны другие классы двойственных задач. Показано применение изложенного в теории пластичности. Л. И. Горьков

10 В119. Линейное и квадратичное программирование. Potthoff G. Lineare und quadratische Programmierung. «Monatsber. Dtsch. Akad. Wiss. Berlin», 1960, 2, № 3—4, 133—137 (нем.)

Примеры задач линейного (распределение грузопотоков в транспортной сети) и квадратичного (распределение токов в электрической сети) программирования. И. В. Романовский

10 В120. Функциональные уравнения в теории динамического программирования. XI. Предельные теоремы. Bellman Richard. Functional equations in the theory of dynamic programming. XI: Limit theorems. «Rend. Circolo mat. Palermo», 1959, **8**, № 3, 343—345 (англ.)

Рассматривается следующая задача: Имеется конечный связный ориентированный граф, каждой дуге которого сопоставлено неотрицательное вещественное число. Назовем длиной пути сумму чисел, соответствующих дугам, входящим в путь. Тогда максимальная длина N-шагового пути, исходящего из вершины p,

$$f_N(p) \sim Na$$

при $N \to \infty$, где a — константа, не зависящая от p.

Примечание референта. Известно более простое, чем приводимое в статье, доказательство теоремы, основанное на возможности выделить «оптимальный» цикл конечного графа. И. В. Романовский

10 В121. О дальности пути самолета. Franklin J. N. The range of a fleet of aircraft. «J. Soc. Industr. and Appl. Math.», 1960, **8**, № 3, 541—548 (англ.)

Имеется n самолетов с емкостями баков g_i и расходами горючего r_i на единицу пути. Начальный запас бензина равен g. Требуется найти максимальное расстояние, которое может преодолеть хоть один из этих самолетов, если в пути возможна передача горючего и любой самолет можно оставлять по дороге. Задача решена для $n = 1, 2$, а также при $g_i = g$, $r_i = R$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$. Для общего случая методом динамического программирования выведена рекуррентная формула. С. С. Кислицын

10 В122. Об оптимальных и почти оптимальных поведениях при выборе регулирующих сил для систем контроля. Aoki Masanao. On optimal and suboptimal policies in the choice of control forces for final—value systems, «IRE Internat. Convent. Rec.», 1960, **8**, № 4, 15—22 (англ.)

Обсуждается вопрос о решении следующей задачи: Выбрать регулирующие силы $v_n = \pm m$ $(n = 0, 1, \ldots, N-1)$ так, чтобы минимизировать $E\left(x_N^2\right)$, где x_N находится из соотношений

$$x_{n+1} = \alpha x_n + r_n + v_n \quad (n = 0, 1, \ldots, N-1).$$

Предполагается, что $0 < \alpha < 1$, а r_n — независимые случайные величины, принимающие с вероятностью p значение b и с вероятностью $1 - p$ значение $-b$. С. С. Кислицын

10 В123. Некоторые асимптотические свойства бета-модели обучения Льюса. Lamperti John, Suppes Patrick. Some asymptotic properties of Luce's beta learning model. «Psychometrika», 1960, **25**, № 3, 233—241 (англ.)

Рассматривается модель обучения с двумя исходами A_1 и A_2. В зависимости от того, получает ли объект подкрепление после того, как он выбрал A_1 или A_2, происходят события E_1 или E_2. Пусть p_n — вероятность выбора A_1 на n-м опыте. Модель Льюса описывается следующим образом: если на n-м опыте произошли исход A_j и событие E_k, $j, k = 1, 2$, то

$$p_{n+1} = \frac{p_n}{p_n + \beta_{jk}(1 - p_n)},$$

где $\beta_{jk} > 0$. Получены асимптотические результаты для случаев двух и четырех операторов со случайным и детерминированным подкреплением. Е. Б. Яновская

10 В124. Функция инвестиций с запаздыванием. Eisner Robert. A distributed lag investment function. «Econometrica», 1960, **28**, № 1, 1—29 (англ.)

С помощью известных статистических методов (линейная регрессия, критерий χ^2) на численных данных производится проверка предположения о том, что функция инвестиций линейно зависит от спроса в течение ряда предыдущих лет. Делается вывод о том, что функция инвестиций в большей степени зависит от спроса, нежели от прибылей. С. С. Кислицын

10 В125. Межвременной выбор и форма семейств кривых безразличия. Gorman W. M. Intertemporal choice and the shape of indifference maps. «Metroeconomica», 1957, **9**, № 1, 1—22 (англ.)

Изучение свойств семейства функций полезности в теории спроса при некоторых ограничениях. Л. И. Горьков

10 В126. Расчет ошибок выборки для индексов. Banerjee K. S. Calculation of sampling errors for index numbers. «Indian J. Statist.», 1960, **22**, № 1—2, 119—130 (англ.)

Дальнейшее уточнение методов оценки индекса Лесперея (РЖМат, 1960, 4356, 14206). С. С. Кислицын

10 В127. О вычислении процентов по рентам. Chiassino Giuseppe. Sul calcolo del tasso di una rendita certa, «Riv. internaz. sci. econ. e commerc.», 1960, **7**, № 7, 680—685, 694, 698 (итал.; рез. англ., нем.)

10 В128. Теория игр и ее применения к оценке заинтересованности. Benjamin S. The theory of games and its application to rate of interest. «J. Inst. Actuaries», 1959, **85**, № 3, 373—412. Discuss., 413—437 (англ.)

10 В129. Применение математики к изучению ценообразования Гансом фон Мангольдтом. Из истории математической экономики. Schneider Erich. Hans von Mangoldt on price theory: a contribution to the history of mathematical economics. «Econometrica», 1960, **28**, № 2, 380—392 (англ.)

Содержание и историческое значение книги «Очерк теории народного хозяйства» (Штуттгарт, 1863).

10 В130. Отчет об Амстердамском конгрессе Эконометрического общества, 10—12 сентября 1959 г. — Report of the Amsterdam meeting of the Econometric Society, Sept. 10—12, 1959, «Econometrica», 1960, **28**, № 3, 647—669 (англ.)

Обзор, содержащий тезисы 19 докладов и краткие стенограммы выступлений в прениях. Работа конгресса проходила в четырех секциях: анализ спроса, использование эконометрических моделей, эконометрические методы в исследовании операций, разное. А. А. Корбут

10 В131. Простое устройство для приближенного решения динамических систем, встречающихся в экономике. Ting Kuan, Shu-chuang. A simple device for approximating solution of dynamic systems occuring in economics. «Metroeconometrica», 1956, **8**, 186—198 (англ.)

Описана схема построения механического устройства, аппроксимирующего решения разностных, дифференциальных и смешанных разностно-дифференциальных линейных уравнений с постоянными коэффициентами. Это устройство состоит из двух горизонтальных металлических дисков, закрепленных в центре и работающих в сочетании с набором гирек разного веса. S. Ichimura

Перевод из Math. Revs, 1958, **19**, № 3.

10 В132. О некоторых вычислениях, связанных с моделью затрат и выпуска. Matuszewski T. I. On some input-output computations. «J. Roy. Statist. Soc.», 1960, **A123**, № 2, 195—199 (англ.)

Хорошо известные в линейной алгебре формулы нахождения обратной матрицы методом окаймления используются для вычислений в леонтьевских моделях.

Л. И. Горьков

10 В133. Изучение вопроса о замене оборудования с более общей точки зрения. Dreyfus Stuart E. A generalized equipment replacement study. «J. Soc. Industr. and Appl. Math.», 1960, **8**, № 3, 425—435 (англ.)

В течение периода N лет в начале каждого года имеется возможность либо приобретать новую машину, либо оставлять работать старую. Функции дохода, стоимости содержания машины и ее замены, заданы и зависят от длительности эксплуатации. Требуется найти правило замены, максимизирующее суммарный доход за период N лет. Для решения задачи применен аппарат динамического программирования. В заключение кратко рассмотрены случаи, когда можно приобретать машину, уже бывшую в употреблении, и когда имеется ограничение на первоначальный денежный капитал.

С. С. Кислицын

10 В134. Маргинальный анализ в исследовании операций. Lesourne Jacques. L'analyse marginale dans la recherche opérationnelle. «Trav. et méthodes», 1960, № 141, 83—85 (франц.)

Излагаются основные математические принципы маргинального анализа, т. е. исследования экстремальных моделей с дополнительными ограничениями на переменные. Подчеркивается широкая применимость этих принципов как в детерминированном, так и в стохастическом случаях. Обсуждаются экономические понятия, связанные с применением идей маргинального анализа: маргинальные издержки, маргинальная прибыль и маргинальная эффективность вложений. Высказанные положения иллюстрируются примерами.

А. А. Корбут

10 В135. О применении к производственным системам метода обратной связи. Salah E. A. Elmaghraby. On the feedback approach to industrial systems design. Conf. 6 Congr. internat. «Inst. Manag Sci.», Paris, 1959, Londres—Paris—New York—Los Angeles, s. a., 1/35—23/35 (англ.)

Рассматривается проблема анализа и синтеза объединенных производственных систем. Автор использует принятую в технике связи теорию управления системами. Изучаются ситуации, когда производственные системы имеют случайный ввод. В связи с этим рассматриваются вопросы анализа и предсказания в таких системах. Библ. 14 назв.

Е. П. Липатов

10 В136. Замечания к статье Эйлона «Определение экономичного размера партии». Ответ автора. Kerner H. Comments on «Economic batch-size determination» by S. Eilon. Author's reply. «Operat. Res. Quart.», 1960, **11**, № 1—2, 77—79 (англ.)

Автор считает искусственными критерии максимальности прибыли на партию и максимальной скорости оборота, рассматриваемые Эйлоном (РЖМат, 1961, 5В108). В ответе Эйлон убедительно защищает свою точку зрения.

С. С. Кислицын

10 В137. Вычислительный подход к задаче о размере партий и о составлении графиков работ. Rogers Jack. A computational approach to the economic lot scheduling problem. «Manag. Sci.», 1958, **4**, № 3, 264—291 (англ.)

10 В138. Исследование операций и его практическое применение. Havlín V. Operační výzkum a jeho praktické použití, «Automatizace», 1960, **3**, № 8, 225—229 (чешск.)

10 В139. Цели и смысл внедрения исследования операций в промышленность. «Опэрэсёндзу рисати, Operat. Res. Manag. Sci.», 1956, **1**, № 5, 227—233 (японск.)

10 В140. По поводу задачи о составлении графиков работ. Piehler J. Ein Beitrag zum Reihenfolgeproblem. «Unternehmensforschung», 1960, **4**, № 3, 138—142 (нем., рез. англ.)

Указан способ сведения общей задачи теории расписаний (РЖМат, 1957, 6551; 1959, 718, 6124) с m деталями и n машинами к задаче о бродячем торговце (РЖМат, 1960, 8028—8030). Предложенный способ проиллюстрирован числовым примером.

А. А. Корбут

10 В141. Два исследования по перегруженности аэропорта. Friend J. K. Two studies in airport congestion. «Operat. Res. Quart.», 1958, **9**, № 3, 234—253 (англ.)

Рассмотрены задачи об обеспечении подвозочным транспортом взлетно-посадочных площадок в Лондонском аэропорту и о комплексной программе обслуживания транзитных самолетов в аэропорту Карачи. Обе задачи сводятся к выбору уровня (интенсивности) обслуживания в системе с постоянным временем обслуживания. В заключение сравниваются существенные характеристики обеих задач и методы их исследования.

А. А. Корбут

10 В142. Потери, вызванные неверными данными, при вычислении оптимальных поведений в управлении запасами. Gluss Brian. Costs of incorrect data in optimal inventory computations. «Manag. Sci.», 1960, **6**, № 4, 491—497 (англ.)

Бесконечношаговый процесс управления запасами, в котором штрафные издержки равны $py+q$, а стоимость заказа партии размера y равна ky, описывается уравнением

$$f(x) = \min_{u \geqslant x} \left[k(y-x) + a \left[\int_y^\infty [p(s-y)+q]\,\varphi(s)\,ds + \right.\right.$$
$$\left.\left. + f(0) \int_y^\infty \varphi(s)\,ds + \int_0^y f(y-s)\,\varphi(s)\,ds \right]\right]$$

(РЖМат, 1961, 6В133, гл. V, § 9). В статье изучаются убытки, происходящие от замены точных значений p, q и коэффициента скидки a их неточными значениями p', q', a'. Приведен численный пример для случая $\varphi(s) = (1/4)\,s \exp(-s/2)$. Рассмотренный вопрос в случае $q = 0$ изучался Леви (РЖМат, 1961, 9В176).

А. А. Корбут

10 В143. Решение задачи об оптимальном управлении запасами для некоторых частных видов плотности распределения спроса. Gluss Brian. An optimal inventory solution for some specific demand distributions. «Naval Res. Logist. Quart.», 1960, **7**, № 1, 45—48 (англ.)

Постановку задачи см. Р. Белман (РЖМат, 1961, 6В133К, гл. V). В заметке указан метод решения получающихся функциональных уравнений для случая, когда плотность распределения спроса φ удовлетворяет условию

$$\varphi'(y)/\varphi(y) = L(y)/M(y),$$

где L и M — квадратичные функции. В этот класс попадают нормальное распределение, распределение χ^2 и др.

А. А. Корбут

10 В144 К. Введение в теорию игр. Мак-Кинси Д. Перев. с англ. Киев, Киевск. высш. инж. радиотехн. уч-ще, 1959, 346 стр., илл., беспл.

10 В145 К. Математические методы в теории игр, программировании и экономике. I. Матричные игры, программирование и математическая экономика. II. Теория бесконечных игр. Karlin Samuel. Mathematical methods and theory in games, programming and economics. Vol. I. Matrix games, programming, and mathematical economics. Vol. II. The theory of infinite games. London—Paris, Pergamon Press, Addison — Wesley Publ. Co Inc., 1959, x, 433 pp., ill., 75 sh.; xi, 386 pp., ill., 75 sh. (англ.)

Реферируемая монография представляет собой первую попытку дать в рамках единой систематической теории синтез основных математических идей и аппарата теории игр, линейного и нелинейного программирования, а также теории и методов математической экономики. Монография состоит из трех частей: части 1 (Матричные игры) и 2 (Линейное и нелинейное программирование) образуют I том; часть 3 (Бесконечные игры) составляет II том. В монографии рассматриваются в основном статические процессы, в которых элементы случайности и неопределенности не являются центральными. Совершенно не затронуты стохастические модели, динамическое программирование и теория игр n лиц.

Первая часть монографии открывается главой, посвященной общим понятиям теории игр (игры в нормальной форме, стратегия, функция выигрыша), а также доказательству теоремы о минимаксе. В гл. 2 развивается основной аппарат теории матричных игр. Вводится понятие доминирования стратегий; дается характеристика множеств оптимальных стратегий игры, а также экстремальных оптимальных стратегий. Здесь же рассмотрены вполне смешанные и симметричные игры. Гл. 3, построенная в основном на результатах Боненбласта, Карлина и Шепли, посвящена изучению размерностей множеств оптимальных стратегий и построению игр с заданными множествами оптимальных стратегий. Элементарная по математическому аппарату гл. 4 представляет собой подробное исследование нескольких конкретных игр (игра Блотто, опознавание своих и неприятеля, предвыборная кампания, задача о торгах).

Вторая часть монографии состоит из пяти глав. Гл. 5 излагает основные теоретические вопросы линейного программирования (двойственные задачи, теоремы существования и двойственности, связь линейного программирования и матричных игр), а также некоторые модели задач линейного программирования (транспортная задача, задача о складировании, задача о максимальном потоке в сети и др.). Изложению численных методов посвящена гл. 6. Ее основную часть занимает подробное описание и исследование симплекс-метода и его модификаций, а также его иллюстрация на примере решения задачи о смесях. Изложен метод Форда и Фулкерсона для решения задач о потоке в сети и метод дифференциальных уравнений Брауна—фон Неймана в теории игр. Подробно изложен и исследован также итеративный метод решения матричных игр. Обширная гл. 7 посвящена вопросам нелинейного программирования.

Важную часть I тома образуют гл. 8 и 9, посвященные математическому исследованию некоторых экономических моделей. После описания простых линейных моделей равновесия и обмена (модели Леонтьева) излагается теория положительных матриц и указываются ее приложения к теории линейных экономических моделей. Следующие параграфы посвящены моделям, связанным с теорией производства и теорией потребления. Итогом гл. 8 является общая статическая модель равновесия Эрроу—Дебре, исследование которой требует весьма тонких топологических методов. Гл. 9 посвящена более сложным моделям равновесия — в основном динамическим. Важным предметом рассмотрения здесь, например, является существование и единственность оптимума Парето. Описаны модель расширяющейся экономики фон Неймана и динамическая модель Леонтьева.

II том монографии целиком посвящен бесконечным играм. С целью сделать его независимым от I тома автор полностью включил в него 1-ую гл. Гл. 2 вводит в основные понятия и методы теории бесконечных игр. Здесь же дается классификация бесконечных игр вместе с кратким обзором содержания последующих глав. Глава завершается замечаниями о методах решения. В гл. 3 исследуются сепарабельные и полиномиальные игры (т. е. игры с «вырожденным» ядром), занимающие промежуточное положение между конечными и бесконечными играми. Их теория строится на основе теории конечных выпуклых игр и теории выпуклых конусов. Основное содержание гл. 4 составляет результаты Боненбласта и Карлина об играх с выпуклыми и «обобщенно-выпуклыми» ядрами. Гл. 5 и 6 посвящены важному в приложениях классу игр — «играм с выбором момента времени» (games of timing). Это игры, в которых чистые стратегии игроков представляют собой моменты времени их возможных действий (типичный пример — игры типа дуэли). Все исследование в этих главах ведется в «дуэльных» терминах Различаются дуэли с одним и с несколькими выстрелами у каждого игрока. Для исследования таких игр существенно знание характера функции меткости (т. е. зависимости вероятности успеха от времени) и наличие или отсутствие информации о действиях противника (так называемые «тихие» и «шумные» дуэли). Автор приводит примеры дуэлей, выводит интегральные уравнения для игр этого класса, дает классификацию их ядер и доказывает теоремы существования для ядер различных типов. Гл. 7 состоит несколько особняком. Она посвящена более тонким вопросам теории бесконечных игр. Рассмотрены игры с аналитическими ядрами и с характерными для многих игр типа погони «куполообразными» ядрами (т. е. ядрами типа плотности двумерного нормального распределения). Для последнего класса игр удается получить достаточно полное описание решений. Кроме того, обсуждены интересные классы игр, ядра которых являются функциями Грина некоторых дифференциальных уравнений, и игр, инвариантных в том или ином смысле относительно некоторых групп преобразований. Гл. 8, озаглавленная «Бесконечные классические игры, играющиеся не на единичном квадрате», изучает игры, у которых множество стратегий каждого из игроков может и не являться множеством распределений вероятностей на [0,1], но может быть погружено в некоторое пространство функций. Такие игры можно интерпретировать как дуэли, в которых по крайней мере один из партнеров может действовать непрерывным образом (типичный пример — дуэль двух пулеметчиков). Общей теории такого рода игр пока не имеется, но некоторые полезные приемы позволяют более или менее успешно рассматривать конкретные задачи. Глава построена на подробном анализе двух примеров игр такого типа. В гл. 9 изучаются различные упрощенные модели покера двух лиц и некоторых других простых карточных игр. Оба тома монографии, кроме 1-й главы, имеют еще одну общую часть — библиографию (257 названий) и приложение, состоящее из разделов «Векторные пространства и матрицы», «Выпуклые множества и функции» и «Разное» (полунепрерывные функции, теоремы о неподвижной точке, функции множеств и распределения вероятностей). Каждая глава монографии сопровождается подробными историческими и библиографическими комментариями. Кроме того, к каждой главе приложены задачи (330) разного уровня трудности (частично с ответами и указаниями). В целом монография написана на высоком математическом уровне. При большом удельном весе прикладных вопросов в книге уделено немало места и тонким теоретическим проблемам. Обширность и современность затронутого в монографии материала в равной мере делает ее пригодной в качестве учебника и справочного руководства.

А. А. Корбут

10 В146 К. Экономические приложения теории графов. Avondo Bodino Giuseppe. Applicazioni economiche della teoria dei grafici. «Pavia, Prem. tip. Successori Frat. Fusi», 1960, 86 p., ill. (итал.)

10 В147 К. Ударные множители и динамические свойства модели Клейна—Гольдбергера. Goldberger Arthur Stanley. Impact multipliers and dynamic properties of the Klein—Goldberger model. Amsterdam, North Holland Publ. Co., 1959, 146 pp., ill., 30 sh. «Brit. Nat. Bibliogr.», 1960, № 527, 6 (англ.)

10 В148 К. Сборник по математической теории хозяйства. Т. 1. Математические основы и математическая статистика народного и промышленного хозяйства. Löffelbein Kurt. Kompendium der mathematischen Wirtschaftstheorie. Bd. 1. Die mathematischen Grundlagen und d. mathematische Statistik f. Volks- und Betriebswirte. Wiesbaden, Dr. Gabler, 1959, 360 S., ill., 19.80 DM. «Dtsch. Nationalbibliogr.», 1960, **A**, № 6, 356 (нем.)

ПРИМЕНЕНИЕ ТЕОРЕТИКО-ВЕРОЯТНОСТНЫХ И СТАТИСТИЧЕСКИХ МЕТОДОВ

Редактор *Р. Л. Добрушин*

10 В149. О статистической механике непрерывной среды. Krzywobłocki M. Z. On the statistical mechanics of continuous media. «Publs Inst. math. Acad. serbe sci.», 1959, **13**, 1—16 (англ.)

Следуя методике, предложенной Кампе-де Ферье (1951), развиваются способы статистического описания колебаний в одномерных непрерывных телах (струны, стержни, балки), описываемых уравнениями вида $y_{tt} = y_{xx}$ или $y_{tt} = -y_{xxxx}$ при тех или иных однородных краевых условиях в точках $x = 0$ и $x = l$. В качестве фазового пространства Ω избирается множество всех вещественных функций $f(s)$, $-\infty < s < \infty$, имеющих период $2l$, всюду непрерывных и трижды непрерывно дифференцируемых (кроме конечного числа точек разрыва первого рода), имеющих нулевое среднее значение по периоду и обладающих свойством $f'''(s) = -f'(s)$. На Ω вводится однопараметрическая абелева группа взаимнооднозначных преобразований T_t, где t определено на периоде $0 \leqslant t \leqslant rl$, и вводится определенным образом инвариантная мера m. Устанавливается, что для линейных функционалов на Ω средние значения вдоль траектории $T_t\omega$ и по времени совпадают. А. С. Монин

10 В150. Соотношения взаимности Онзагера для нелинейных систем. Uhlhorn U. Onsager's reciprocal relations for non linear systems. «Arkiv fys.», 1960, **17**, № 3-4, 361—368 (англ.)

Рассматривается нелинейная термодинамическая система, характеризуемая термодинамическими переменными $\alpha = (\alpha', \ldots, \alpha^n)$, удовлетворяющими уравнениям $d\alpha^\mu/dt = a^\mu(\alpha)$. Средствами статистической механики доказывается, что если указанные уравнения инвариантны относительно операции T обращения времени, то они могут быть записаны в виде

$$d\alpha^\mu/dt = [f(\alpha)]^{-1} \frac{\partial}{\partial \alpha^\nu} [L^{\mu\nu}(\alpha) f(\alpha)],$$

где $f(\alpha)$ — плотность распределения величины α в состоянии равновесия, а величины $L^{\mu\nu}(\alpha)$ обладают свойством

$$T^\mu_{\mu'} T^\nu_{\nu'} L^{\mu'\nu'}(T\alpha) = L^{\mu\nu}(\alpha).$$

Если величины $L^{\mu\nu}$ не зависят от α, а $f(\alpha)$ есть гауссовская функция $\exp\left(-\frac{1}{2} S_{\mu\nu}\alpha^\mu\alpha^\nu\right)$, то уравнения движения оказываются линейными, а указанные соотношения между величинами $L^{\mu\nu}$ сводятся к обычным соотношениям взаимности Онзагера. А. С. Монин

10 В151. Скорость аннигиляции дефектов кристаллической решетки в результате их диффузии. Penning P. Rate of diffusion-limited annihilation of excess vacancies. «Philips Res. Repts», 1959, **14**, № 4, 337—345 (англ.; рез. франц., нем.)

Кристалл рассматривается как непрерывная среда, в которой диффундируют дефекты кристаллической решетки (пустоты), причем коэффициент диффузии D одинаков по всем направлениям. Дефекты могут поглощаться (аннигилироваться) на поверхности кристалла и на линиях дислокации. На поверхности кристалла и на расстоянии a от линии дислокации сохраняется равновесная концентрация дефектов. В качестве начального берется равномерное распределение дефектов. Вначале рассматривается случай равноотстоящих линий дислокации, аннигилирующих все неравновесные дефекты на расстоянии $b \gg a$ от этих линий, где $\pi b^2 = \frac{1}{N_D}$ (N_D — число дислокаций на единицу площади поперечного сечения). Тогда концентрация дефектов c в области $a \leqslant r \leqslant b$ расстояний r от линии дислокации определяется из уравнения диффузии

$$\frac{\partial c}{\partial t} = \frac{D}{r} \frac{\partial}{\partial r} r \frac{\partial c}{\partial r}$$

при краевых условиях $c = 0$ при $r = a$ и $\frac{\partial c}{\partial r} = 0$ при $r = b$. Решение этого уравнения затухает со временем приблизительно экспоненциально с постоянной времени $\tau = 1/\beta N_D D$, где β — слабо зависящая от N_D величина. Далее обсуждается модель с неравномерным (случайным) распределением линий дислокации, а также вкратце рассматриваются случаи, в которых аннигиляция дефектов происходит только на поверхности кристалла или и на поверхности, и на линиях дислокации. А. С. Монин

10 В152. Теория восстановления, проблемы счётчиков и квазипуассоновские процессы. Smith W. L. On renewal theory, counter problems, and quasi-poisson processes. «Proc. Cambridge Philos. Soc.», 1957, **53**, № 1, 175—193 (англ.)

Ряд задач для счетчиков с мертвым временем как продлевающего, так и непродлевающего типа рассматривается с точки зрения общей теории восстановления (РЖМат, 1959, 11288). Напомним, что регистрация частиц, поступающих в моменты $\{s_l\}$, производится счетчиком с мертвым временем непродлевающего типа, если моменты регистрации $\{^p s_l\}$ образуются с помощью некоторого процесса восстановления $\{\chi_n\}$, $n = 1, 2, \ldots$ (т. е. последовательности независимых одинаково распределенных величин) следующим образом. Пусть n_1 — наименьшее n такое, что $s_n > \chi_1$, а n_r — наименьшее n, для которого $s_n > s_{n_{r-1}} + \chi_r$, тогда r-й момент регистрации полагается равным s_{n_r}. Говорят, что последовательность моментов $\{s_l\}$ регистрируется с использованием счетчика с мертвым временем продлевающего типа, когда точка s_n объявляется зарегистрированной, если $s_n > s_m + \chi_{m+1}$ для всех $0 \leqslant m < n$. Вводится класс λ-процессов восстановления, для которого интервалы между моментами последовательных восстановлений $t_n = u_n + v_n$, $n = 1, 2, \ldots$, где u_n и v_n — взаимно независимые неотрицательные случайные величины: $P\{u_n \leqslant x\} = G(x)$, общего вида, $\int_0^\infty t dG(t) < \infty$, а $P\{v_n > x\} = e^{-\lambda x}$, $t_0 = 0$. Для λ-процессов интенсивность восстановлений $h(t) \to \mu_1^{-1}$, $t \to \infty$, где $\mu_1 = Mt_n$. Если поступающий в счетчик поток частиц является пуассоновским, то моменты реги-

страций частиц образуют λ-процесс. Для счетчика с мертвым временем продлевающего типа и функцией распределения $B(x)$ для длительности мертвого времени интенсивность сосчитанных частиц

$$h(t) = \lambda B(t-0) \exp\left\{-\lambda \int_0^t [1 - B(\theta)]\, d\theta\right\},$$

при этом $h(t) \to \frac{1}{\mu_1}$, когда $t \to +\infty$, где μ_1 находится из уравнения

$$\lambda\mu_1 = e^{\lambda b_1}, \quad b_1 = \int_0^\infty t dB(t).$$

Дисперсия для интервалов времени между регистрациями частиц равна

$$\lambda e^{-\lambda b_1}\left\{1 + 2\int_0^\infty [h(t) - \lambda e^{-\lambda b_1}]\, dt\right\}.$$

Обобщением пуассоновских процессов являются квазипуассоновские процессы с индексом τ, для которых среднее число восстановлений $H(t)$ на интервале $(+0, t)$ является линейной функцией

$$H(t) = \frac{t}{\mu_1} + c, \quad t \geqslant \tau.$$

Эти процессы обладают рядом полезных свойств. Если поток частиц, поступающих в счетчик с мертвым временем непродлевающего типа, является квазипуассоновским с индексом τ, а функция распределения длительности мертвого времени $C(t)$ такая, что $C(\tau) = 0$, то преобразование Лапласа для функции распределения интервалов между моментами регистрации частиц равно

$$C^*(s) \cdot \left\{\frac{1 - F^*(s)}{\mu_1 s}\right\},$$

где

$$C^*(s) = \int_0^\infty e^{-st} dC(t),$$

$$F^*(s) = \int_0^\infty e^{-st} dF(t),$$

$$\mu_1 = \int_0^\infty t dF(t).$$

Приведены различные примеры из теории счетчиков. Имеются опечатки. Ю. К. Беляев

10 В153. О распределении вероятностей сигналов поврежденных счетчиков. Békéssy Andras. Hibás scalerek (jelosztók) jeleinek valószínűség-eloszlásáról. «A magyar tud. akad. Alkalm. mat. int. közl», 1954 (1955), 3, № 1-2, 171—181 (венг.; рез. русск., нем.)

Элементарным методом доказывается, что отношение дисперсии и математического ожидания зарегистрированных частиц больше у испорченного счетчика, чем у исправного. Предполагается, что: а) распределение приходящих частиц пуассоновское и б) дефект счетчика состоит в том, что каскады в счетчике переходят из одного состояния в другое с вероятностью, меньшей 1.

М. Арато

10 В154. Выбор интервала отсчета при физических измерениях и его влияние на надежность результата. Sindelář Václav. Volba čtecího intervalu při fysikálních měřeních a jeho vliv na spolehlivost výsledku. «Mat.-fyz. časop.», 1958, 8, № 4, 228—235 (словацк.; рез. русск., нем.)

С помощью элементарных соображений теории ошибок исследуется вопрос об оптимальном выборе единичного деления шкалы физического прибора.

Р. Л. Добрушин

10 В155. К определению спектральной плотности мощности действительных случайных стационарных процессов. Карновский М. И. «Изв. высш. учебн. заведений. Радиотехника», 1960, 3, № 3, 337—341

Автор обращает внимание на «распространенные в литературе случаи некорректного применения соотношений между спектральной плотностью и функцией корреляции действительных стационарных случайных процессов», что связано с существованием двух разных определений спектральной плотности мощности действительных случайных стационарных процессов. С одной стороны, спектральная плотность определяется как $\frac{1}{2}\pi\int_{-\infty}^{\infty} B(\tau) e^{-j\omega\tau} d\tau$ (где $B(\tau)$ — корреляционная функция), а с другой, — как функция, равная $\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} B(\tau) e^{-j\omega\tau} d\tau$ при $\omega \geqslant 0$ и 0 при $\omega < 0$.

М. И. Фортус

10 В156. Введение в измерение спектров. Tukey John W. An introduction to the measurement of spectra. «Probability and statistics. Stockholm, Almqvist and Wiksell; New York, John Wiley and Sons», 1959, 300—330 (англ.)

Приводятся практические рекомендации по измерению спектральных плотностей стационарных процессов. Доказательств нет, основное внимание уделяется практической стороне вопроса. Приведена библиография (43 назв.) по измерению спектров случайных процессов, встречающихся в астрономии, аэродинамике, океанографии, метеорологии и в других науках. В. Ф. Писаренко

10 В157. Замечание о сходимости средней информации Каллбека—Лейблера. Ikeda Sadao. A remark on the convergence of Kullback—Leibler's mean information. «Ann. Inst. Statist. Math.», 1960, 12, № 1, 81—88 (англ.)

Введем следующие обозначения. (R, S, m) — пространство с σ-конечной мерой. μ, ν — меры на измеримом пространстве (R, S), абсолютно непрерывные относительно меры m; $f(x)$, $g(x)$ — соответствующие производные. $D(f)$, $D(g)$ — носители $f(x)$, $g(x)$. Предполагается, что $D(f) = D(g)(m)$ (т. е. что меры μ и ν абсолютно непрерывны друг относительно друга).

$$I(f:g) = \int_R f(x) \log \frac{f(x)}{g(x)}\, dm(x)$$

— «средняя информация Каллбека — Лейблера».

Доказывается теорема. Предположим, что:

(1) $f(x)$ и $g(x)$ неотрицательны почти всюду (m) на R; $\mu(R) < \infty$, $\nu(R) < \infty$ и $D(f) = D(g) = E(m)$;

(2) $\{f_i, g_i\}$ $(i = 1, 2, \ldots)$ — последовательность пар неотрицательных почти всюду (m) на R функций, $\mu_i(R) = \int_R f_i dm < K$, $\nu_i(R) = \int_R g_i dm < K$ и $D(f_i) = D(g_i) = E_i(m)$ для $i = 1, 2, \ldots$, где K — положительная постоянная;

(3) $E_i \subset E(m)$ $(i = 1, 2, \ldots)$, $\nu(E - E_i) \to 0$ при $i \to \infty$.

В этих предположениях

$$I(f_i; g_i) \to I(f:g) \quad (i \to \infty),$$

если выполняется одно из следующих условий:

$$(A) \operatorname*{ess\,sup}_{E_i} \left|1 - \frac{g_i}{g}\right| \to 0, \ \operatorname*{ess\,sup}_{E_i} |p - p_i| \to 0 \ (i \to \infty);$$

$$(B) \operatorname*{ess\,sup}_{E_i} \left|1 - \frac{g_i}{g}\right| \to 0, \operatorname*{ess\,sup}_{E_i} \left|1 - \frac{p_i}{p}\right| \to 0 \ (i \to \infty),$$

где

$$p(x)=\frac{f(x)}{g(x)}(m),\ p_i(x)=\frac{f_i(x)}{g_i(x)}(m)\ (i=1,2,\ldots)$$

соответственно на E и E_i и ess sup — наименьшая из верхних граней, взятых по множествам $A\subset E_i$ таким, что $m(A-E_i)=0$. Приводится несколько следствий доказанной теоремы. Л. Я. Савельев

10 В158. Теоремы кодирования для дискретного источника с заданным критерием точности. Shannon Claude E. Coding theorems for a discrete source with a fidelity criterion. «IRE Nat. Convent. Rec.», 1959, 7, № 4, 142—163 (англ.)

Развивая мысли, конспективно изложенные в его основополагающей статье (Shannon C. E., Warren Weaver, The Mathematical Theory of Communication, University of Illinois Press, 1949), автор строит теорию оптимальной передачи сообщения с заданной точностью. Сообщение на входе представляет собой стационарный процесс $\ldots, \xi_{-1}, \xi_0, \xi_1, \ldots$, где величины ξ_l принимают каждая значения $m_1, \ldots, m_t$; величины на выходе η_l принимают значения $z_1, \ldots, z_s$. Задается матрица $d(k, l)$, $k=1,\ldots,t$; $l=1,\ldots,s$, задающая «стоимость» искажения значения сообщения на входе m_k в значение z_l на выходе. Среднее искажение для блока $\xi_1, \ldots, \xi_n$ определяется как

$$M\left\{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} d(\xi_i, \eta_i)\right\}.$$

Требуется выяснить, с какой максимальной скоростью можно вести передачу по каналу с заданной средней пропускной способностью C на единицу времени так, чтобы среднее искажение не превосходило заданной константы d. Вводится понятие скорости создания сообщений при заданном искажении d как

$$R(d)=\sup\sum_{k=1}^{t}\sum_{l=1}^{s} P\{\xi_l=m_k\}\times$$

$$\times q_{l|k}\log\frac{q_{l|k}}{\sum\limits_{l} P\{\xi_l=m_k\}},$$

где верхняя грань берется по всем матрицам $q_{l|k}$ таким, что

$$\sum_{k,l} P\{\xi_l=m_k\}\, q_{l|k}\, d(k,l)\leqslant d.$$

Изучаются свойства $R(d)$: оказывается, что она является непрерывной, вогнутой функцией от d. Указывается, что можно дать для $R(d)$ явное выражение, если матрица $\{q_{l|k}\}$ обладает следующим свойством симметрии: каждая строка ее есть перестановка элементов любой другой строки, и то же свойство верно для ее столбцов. Доказывается основная теорема, утверждающая, что если компоненты сообщения ξ_l независимы, то (грубо говоря) минимальное среднее время, за которое можно передать одну букву сообщения так, чтобы среднее искажение не превышало d, равно $\frac{R(d^*)}{C}$. Формулируется аналогичная теорема для случая произвольного эргодического сообщения ξ_l, определение $R(d^*)$ дается аналогично известному определению средней пропускной способности для каналов с памятью. (Доказательство для этого случая содержит существенный пробел: выражение для $I(m; Z)$ на стр. 143, вообще говоря, неверно). Кратко обсуждаются возможности обобщения на случай сообщений с непрерывным множеством состояний. Рассматривается тот случай, когда стоимость искажения зависит не от пары ξ_l, ζ_l, а от пары блоков $(\xi_1, \ldots, \xi_g)$, $(\zeta_1, \ldots, \zeta_g)$, где g — фиксировано. Оптимальная скорость передачи сравнивается со скоростью, достижимой при использовании простых методов кодирования сообщения, в частности методов, основанных на «обращении» известных корректирующих кодов.

Примечание референта. Большинство полученных результатов является частным случаем результатов, независимо полученных референтом. (См. РЖМат, 1960, 11884). Р. Л. Добрушин

10 В159. О методе линейного кодирования с исправлением ошибок в передаваемых сигналах. Варшамов Р. Р. «Сб. тр. Научно-техн. о-ва радиотехн. и электросвязи им. А. С. Попова», 1959, вып. 3, 43—48

Более подробное изложение метода построения двоичных групповых кодов с исправлением фиксированного числа ошибок, опубликованного автором ранее (РЖМат, 1959, 4946). В. И. Левенштейн

10 В160. Построение небинарных самокорректирующихся кодов и оценка числа сигналов в них. Остиану В. М. «Докл. АН СССР», 1960, 135, № 6, 1382—1384

Дается непосредственное обобщение метода Р. Р. Варшамова (РЖМат, 1959, 4946) построения двоичных групповых кодов с исправлением фиксированного числа ошибок на случай кодов с простым основанием. Рассматривается множество $G_{n,b}$ последовательностей $a=(a_1, \ldots, a_n)$, $a_i=0, 1, \ldots, b-1$, $1\leqslant i\leqslant n$, представляющее собой абелеву группу относительно операции поразрядного сложения по $\bmod b$. В $G_{n,b}$ определяется норма $\|a\|$, равная числу ненулевых элементов последовательности a, и расстояние $\rho(a', a'')=\|a'-a''\|$ между последовательностями a' и a''. Если для передачи сообщений используются последовательности, попарные расстояния между которыми не менее $d=2s+1$, то возможно исправить все ошибки (случайные переходы одних символов $0, 1, \ldots, b-1$ в другие), если их произошло не более s. В связи с этим возникает задача: для данных n и $d=2s+1$ построить подмножество $G\subset G_{n,b}$, состоящее из максимального числа $M(n, 2s+1, b)$ последовательностей, попарные расстояния между которыми не менее $2s+1$. Ранее были известны следующие оценки

$$\frac{b^n}{\sum\limits_{i=0}^{2s} C_n^i (b-1)^i}\leqslant M(n, 2s+1, b)\leqslant\frac{b^n}{\sum\limits_{i=0}^{s} C_n^i (b-1)^i}.$$

Автором в случае, когда основание кода — простое число $(b=p)$ и

$$p^m<\frac{p^n}{\sum\limits_{i=0}^{2s-1} C_{n-1}^i (p-1)^i},$$

указан метод построения подгруппы $G\subset G_{n,b}$, состоящей из p^m последовательностей, удаленных друг от друга на расстояние по крайней мере $2s+1$, и тем самым несколько улучшена нижняя оценка.

Примечание референта. Используя арифметику конечных полей, можно аналогичным образом перенести метод Р. Р. Варшамова и на тот случай, когда основание кода есть степень простого числа $(b=p^h)$. В. И. Левенштейн

10 В161. Неравномерное бинарное кодирование. Gilbert E. N., Moore E. F. Variable-length binary encodings. «Bell. System Techn. J.», 1959, 38, № 4, 933—967 (англ.)

Неравномерным бинарным кодом для алфавита $A_1, \ldots, A_n$ называется совокупность n последовательностей

$$E_1 = (x_1^1, x_2^1, \ldots, x_{k_1}^1), \ldots, E_n = (x_1^n, \ldots, x_{k_n}^n),$$

где x_i^j принимает два значения 0 и 1. Бесконечной последовательности $A_{l_1} A_{l_2} A_{l_3} \ldots$ сопоставляется при этом кодировании бесконечная последовательность $E_{l_1} E_{l_2} \ldots$ из символов 0 и 1. Если последовательность $A_{l_1} A_{l_2} \ldots$ образована в результате независимых испытаний с вероятностями исходов $p_1, \ldots, p_n$, то стоимостью кодирования называется число $\sum p_i k_i$. Кодирование называется однозначно дешифруемым, если не существует двух различных последовательностей $A_{l_1} A_{l_2} A_{l_3}, \ldots$, которым кодирование сопоставляет одну и ту же последовательность. Частным случаем однозначно дешифруемого кодирования является кодирование без префиксов, в котором ни одна из последовательностей E_i дописыванием к ней дальнейших символов не может быть превращена в другую последовательность E_j. Кодирование без префиксов наименьшей стоимости было указано Хаффманом (Proc. I. R. E. 1952, **40**, 1098). Авторы называют кодирование алфавитным, если последовательности $E_1, E_2, \ldots, E_n$ упорядочены алфавитным образом. Указывается простая конструкция, позволяющая получить алфавитное кодирование без префиксов со стоимостью, меньшей $H + 2$, где $H = -\sum_{i=1}^{n} p_i \log_2 p_i$. (Для любого однозначно дешифруемого кодирования стоимость $\geqslant H$). Далее указывается алгоритм для построения алфавитного кодирования без префиксов с наименьшей стоимостью. Этот алгоритм был просчитан для английского алфавита. Доказывается, что кодирование Хаффмана имеет наименьшую стоимость среди всех однозначно дешифруемых кодирований. Строится пример, показывающий, что алфавитное однозначно дешифруемое кодирование наименьшей стоимости может не быть кодированием без префиксов. Обсуждается также возможность построения самосинхронизирующегося кодирования, обладающего тем свойством, что ошибки в кодировании не влияют на правильность декодирования достаточно удаленных от них участков последовательности, а также некоторые другие аналогичные вопросы.

Р. Л. Добрушин

10 В162. Заметка о единственности дешифрации. Jaynes E. T. Note on unique decipherability. «IRE Trans. Inform. Theory», 1959, 5, № 3, 98—102 (англ.)

Обсуждаются известные (РЖМат, 1958, 1440; 1961, 5В133) результаты о единственным образом дешифруемых неравномерных кодах для каналов без шумов и выводятся некоторые следствия из этих результатов. Проводится далеко идущая аналогия между ними и некоторыми фактами статистической механики.

Р. Л. Добрушин

10 В163. Теория информации. Colliva Raffaele. Teoria dell'informazione. «Riv. marittima», 1961, **94**, № 2, 39—59 (итал.)

Популярная статья.

Р. Л. Добрушин

10 В164. Создание выборочного гауссовского случайного ряда, имеющего заданную функцию корреляции. Levin Morris J. Generation of a sampled Gaussian time series having a specified correlation function. «IRE Trans. Inform. Theory», 1960, **6**, № 5, 545—548 (англ.)

Описывается способ для получения реализации гауссовского стационарного процесса с заданной спектральной плотностью из случайных чисел, имеющих нормальное распределение. Время предполагается дискретным, а спектральная плотность — рациональной функцией n-го порядка от $e^{i\lambda}$. Процесс строится с помощью разностного уравнения n-го порядка, которому удовлетворяет процесс с данной рациональной спектральной плотностью. Рассмотрен вопрос о том, как получать первые $(n-1)$ значений реализации, чтобы не нарушалась стационарность.

В. Ф. Писаренко

10 В165. Пространственный и временной спектр стационарных случайных волн со специальным вниманием к микроколебаниям. Aki Keiiti. Space and time spectra of stationary stochastic waves, with special reference to microtremors. «Bull. Earthquake Res. Inst. Tokyo», 1957, **35**, 415—456 (англ.; рез. японск.)

Сначала автор рассматривает волновую систему в одномерном пространстве, разлагая её на компоненты данной частоты и скорости. Он показывает, что мощность этих компонент может быть просто найдена путем изучения пространственной корреллограммы частотных компонент, причем частотные компоненты выделяются фильтром. Этот результат обобщен на двумерный случай, где он позволяет изучать направление и поляризацию волн. Автор дает интересный пример анализа этим методом записей некоторых микроколебаний. P. Whittle

Перевод из Math. Revs, 1958, **19**, № 7, 783.

10 В166. Плотность вероятности на выходе фильтра при случайном телеграфном сигнале на входе. McFadden J. A. The probability density of the output of a filter when the input is a random telegraphic signal. «IRE Nat. Convent. Rec.», 1959, **7**, № 4, 164—169 (англ.)

Подсчитываются распределения вероятностей сигнала на выходе линейной системы, когда на вход подается случайная «прямоугольная» волна. В качестве входных сигналов рассматриваются телеграфные случайные сигналы пуассоновского типа (т. е. стационарный случайный процесс, принимающий значения $+1$ и -1 и меняющий их в точках, образующих пуассоновский поток) и периодическая прямоугольная волна со случайной фазой, распределенной равномерно за период (т. е. стационарный случайный процесс, принимающий два значения $+1$ и -1 и меняющий их в периодической последовательности точек). В качестве линейных систем рассматриваются: идеальный интегратор за время T, т. е. преобразование $y(t) = \frac{1}{T}\int_0^T x(t)\,d(t)$, RC-фильтр низких частот, т. е. преобразование $z(t) = \frac{1}{T}\int_{-\infty}^{t} e^{t-\tau/T} x(\tau)\,d\tau$ и RC-фильтр высоких частот, сопоставляющий входу $x(t)$ сигнал $W(t) = \frac{dz(t)}{dt}$. Полученные решения исследуются качественно.

Б. Ф. Курьянов

10 В167. О среднеквадратической ошибке оптимального непрерывного фильтра для коррелированного шума. Blum Marvin. On the mean-square noise power of an optimum continuous filter for correlated noise. «IRE Trans. Inform. Theory», 1960, **6**, № 4, 426—434 (англ.)

Заметка примыкает к предыдущей работе автора (РЖМат, 1958, 1437). В ней рассматривается фильтр «конечной памяти», на вход которого поступает детерминированный сигнал полиномиального вида и экспоненциально коррелированный шум. В заметке содержится некоторое выражение для среднеквадратической ошибки оптимального фильтра, а также ряд таблиц и рисунков.

Ю. А. Розанов

10 В168. Применение теории процессов Маркова для оптимальной фильтрации сигналов. Стратонович Р. Л. «Радиотехн. и электроника», 1960, **5**, № 11, 1751—1763

Рассматривается задача о нахождении апостериорного распределения сигнала, на который накладывается случайная помеха. При рассмотрении этой задачи автор отправляется от так называемой формулы «обратной вероятности» Вудворда-Дэвиса и использует элементы аппарата марковских процессов, например уравнение Фоккера-Планка. В итоге он приводит дифференциальное уравнение, которому удовлетворяет апостериорная «плотность распределения», и ряд других соотношений.

Ю. А. Розанов

10 В169. Замечание о распределении синусоидальной волны в шуме. Leipnik R. Remarks on sine waves plus noise. «IRE Trans. Inform. Theory», 1960, **6**, № 4, 502 (англ.)

Рассматриваемый процесс является суммой двух стационарных независимых процессов: гауссовского с нулевым средним значением (шум) и синусоидального колебания со случайной фазой, равномерно распределенной на $[0,2\pi]$. В форме рядов, содержащих функции Бесселя, получены выражения для его одномерной и двумерной плотностей распределения.

В. Ф. Писаренко

10 В170. Оптимальная оценка импульсного ответа в присутствии шума. Levin Morris J. Optimum estimation of impulse response in the presence of noise. «IRE Nat. Convent. Rec.», 1959, 1960, **7**, № 1, 50—56; **7**, № 4, 174—182 (англ.)

Известные в статистике результаты об оценке параметров регрессии случайного процесса методом наименьших квадратов и с помощью оценок Маркова применяются для оценки импульсного ответа некоторого линейного устройства (время дискретное). Оригинальных результатов работа не содержит.

В. Ф. Писаренко

10 В171. Анализ периодических фильтров со стационарным случайным входом. Urkowitz Harry. Analysis of periodic filters with stationary random inputs. «IRE Trans. Circuit Theory», 1959, **6**, № 4, 330—334 (англ.)

Выведена общая формула для корреляционной функции на выходе периодического фильтра (т. е. фильтра, спектральная плотность которого — периодическая функция), когда на его вход воздействует стационарный случайных процесс с известной корреляционной функцией. Приводятся примеры расчета корреляционной функции для нескольких видов передаточных функций таких фильтров.

Е. М. Сухарев

10 В172. Выбор формы входного сигнала анализатора спектра при выделении сигнала из шума в терминах ее действия на переходную селективность и обнаружимость сигнала. Gersch Will. Choice of the shape of the input to a spectrum analyzer in terms of its effect on transient selectivity and signal detectability. «IRE Nat. Convent. Rec.», 1959, **7**, № 2, 79—88 (англ.)

Рассматривается задача о выделении синусоидального сигнала, действующего в течение конечного интервала времени $[0, T]$, на фоне шума, и определении его частоты с помощью совокупности идентичных фильтров с узкой спектральной характеристикой, перекрывающих заданную полосу частот. Автор вводит понятие о переходной селективности системы, представляющей собой амплитуду сигнала на выходе в момент T, и показывает, что с точки зрения переходной селективности система фильтров с произвольными спектральными характеристиками эквивалентна совокупности фильтров с прямоугольными характеристиками, на вход которой подается модулированный по амплитуде по некоторому закону синусоидальный сигнал. С учетом такой эквивалентности рассматриваются некоторые вопросы расчета конкретных схем анализаторов спектра.

В. П. Яковлев

10 В173. Корреляция и затухание в линии задержки. Jacobson Melvin J. Correlation and delay line attenuation. «IRE Trans. Inform. Theory», 1959, **5**, № 1, 4—9 (англ.)

Рассматривается применение конкретной схемы коррелятора для обнаружения сигнала в шуме. На вход коррелятора поступает по первому каналу сигнал $s(t)$ — стационарный случайный процесс, в сумме с шумом $n_1(t)$, а по второму каналу — задержанный по времени сигнал $s(t+r)$ в сумме с шумом $n_2(t)$, прошедшие через линию задержки, осуществляющую задержку на интервал времени ξ. В корреляторе образуется напряжение $[s(t)+n_1(t)]\cdot[s(t+r+\xi)+n_2(t+\xi)]$, которое затем усредняется с помощью интегрирующей RC-цепочки. В работе исследуется влияние затухания в линии задержки на качество выделения полезного сигнала. Основное внимание уделяется получению расчетных формул для отношения мощности сигнала к мощности шума на выходе коррелятора для конкретной зависимости затухания от частоты при различных спектральных плотностях сигнала. Спектральная плотность шума предполагается постоянной и сосредоточена на конечном интервале частот.

В. П. Яковлев

10 В174. О приеме сигнала при тропосферном рассеянии в условиях мультипликативных помех. Красовский Р. Р., «Изв. высш. учебн. заведений. Радиотехника», 1959, **2**, № 6, 694—698

Пусть имеется амплитудно-модулированный сигнал

$$e_1 = E_1(1 + m\cos\Omega t)\cos\omega_0 t = \sum_{n=1}^{3} E_n \cos\omega_n t,$$

где $E_1 m$ — постоянные, Ω, ω — частоты, $E_2 = E_3 = \frac{1}{2}Em$, $\omega_1 = \omega_0$, $\omega_2 = \omega - \Omega$, $\omega_3 = \omega + \Omega$. После прохождения через канал со случайными изменениями параметров, сигнал принимает вид

$$e_3 = \sum_{n=1}^{3} E_n(t)\cos[\omega_n t + \varphi_n(t)] + U_m(t),$$

где $E_n(t)$, $\varphi_n(t)$ $(n = 1, 2, 3)$ — случайные процессы (случайные амплитуды и фазы сигнала), а $U_m(t)$ — случайный шум приемника. Автор поставил перед собой задачу вычислить корреляционную функцию процесса e_3 после прохождения его через квадратичный детектор.

Применение формулы, на которой основаны подсчеты автора (Левин Б. Р., Теория случайных процессов и ее применение в радиотехнике, 1960, формула 8.28), в данной статье является ошибочным, так как эта формула выводится в предположении, что, во-первых, $\omega_1 = \omega_2 = \omega_3$, и, во-вторых, $E_n(t)\cos\varphi_n(t)$ и $E_n\sin\varphi_n(t)$ являются гауссовскими стационарными и стационарно связанными процессами, что противоречит предположению автора о нормальности процесса $E_n(t)$ $(n = 1, 2, 3)$. Автор считает, что «фаза принимаемого сигнала равновероятна от 0 до 2π, а относительные флюктуации фазы подчиняются нормальному закону с нулевым средним значением». Вторая часть этого предположения не только не обоснована, но и противоречит первой части. Следует отметить также, что формула (6) написана небрежно и в действительности не имеет отношения к формуле (7), кроме того, формула (7) выведена с ошибками. В статье имеется также много других недочетов и опечаток.

О. Г. Журавлев

10 В175. Некоторые обоснования экспериментального определения закона распределения непрерывной случайной функции. Гусев В. Д., Виноградова М. Б. «Вестн. Моск. ун-та. Сер. матем., механ., астрон., физ., химии», 1959, № 6, 99—105

Решается задача об определении одномерной плотности распределения $W(\xi)$ процесса $f(t) = \varphi(t) + \psi(t)$, где $\varphi(t)$ — известная функция времени, $\psi(t)$ — стационарная случайная функция, по известной реализации этого процесса на конечном интервале $[t_0, t_0 + T]$. Предлагается вычислять эмпирическую характеристиче-

скую функцию как $\frac{1}{T}\int_{t_0}^{t_0+T} \exp[i\eta f(t)]\,dt$, а затем брать в качестве оценки для плотности ее преобразование Фурье. В предположении, что процесс гауссовский, а функция корреляции процесса $\psi(t)$ есть $1-\frac{|\tau|}{\tau_0}$ при $|\tau| \leqslant \tau_0$ и равна нулю при $|\tau| > \tau_0$, исследуется разность между оценкой плотности и ее истинным значением.

Примечание референта. В статье имеется много опечаток. В частности, вместо буквы Ψ везде следует подразумевать ψ. В. П. Яковлев

Примечание редактора. Авторы не объясняют, в чем преимущество предложенной ими оценки плотности перед более простыми и естественными оценками, используемыми обычно.

10 В176. Оптимальный прием параметра, передаваемого по каналу с шумами, содержащими мультипликативную, аддитивную и временную компоненты. Сифоров В. И., Флейшман Б. С., Линковский Г. Б. «Сб. тр. Научно-техн. о-во радиотехн. и электросвязи им. А. С. Попова», 1959, вып. 3, 3—17

Рассматривается передача сигнала $f_\lambda(t)$ ($f_\lambda(t)$ — неслучайная известная функция времени, зависящая от параметра λ) по многолучевому каналу, на выходе которого получается сигнал

$$y(t) = \sum_{i=1}^{k} \alpha_i(t)\cdot f_\lambda[t-\tau_i(t)] + \nu(t),$$

где $\nu(t)$, $\alpha_i(t)$, $\tau_i(t)$ — независимые случайные процессы, называемые соответственно аддитивной, мультипликативной и временной компонентами шума. Предполагается, что для различных индексов i процессы $\alpha_i(t)$ и $\tau_i(t)$ одинаково распределены и $k \gg 1$. Требуется по реализации $y(t)$ на некотором отрезке времени оценить параметр λ. Авторы переходят от $y(t)$ к значениям, взятым по дискретной решетке $t_1 \ldots t_n$, и при этом считают, что в точках t_i и t_j $(i \neq j)$ значения каждого из рассматриваемых процессов независимы. После этого для оценки предлагается применять метод максимального правдоподобия и метод моментов. Выписывается уравнение максимального правдоподобия, причем условия, при которых оно выводится, сформулированы весьма нечетко, что оставляет невыясненной область применения полученных результатов. Кроме общих замечаний об известных свойствах оценок максимального правдоподобия, приводятся конкретные примеры, в которых обсуждаются дальнейшие свойства этих оценок.

Примечание референта. Авторы считают, что если выбрать расстояния $t_{i+1} - t_i$ больше минимального из интервалов корреляции рассматриваемых процессов, то это обеспечит независимость значений для каждого из процессов $\alpha_i(t)$, $\tau_i(t)$, $\nu(t)$. Очевидно, для этого необходимо выбирать $t_{i+1} - t_i$ по крайней мере больше максимального из таких интервалов. В. Ф. Писаренко

10 В177. Об идеальном приеме передаваемого параметра по каналу связи при малом числе лучей. Линковский Г. Б. «Сб. тр. Научно-техн. о-во радиотехн. и электросвязи им. А. С. Попова», 1959, вып, 3, 18—33

Рассматривается та же задача, что и в работе автора и других (реф. 10В176), с тем лишь отличием, что k здесь не обязательно велико. Отдельно рассмотрен случай $k=1$. При некоторых дополнительных предположениях выписывается уравнение максимального правдоподобия для параметра λ, имеющее довольно сложный вид.

Примечание референта. Автор считает, что при увеличении числа точек наблюдения (переход к непрерывному наблюдению) оценка максимального правдоподобия сходится по вероятности к истинному значению. Это недоразумение основано на том, что, уменьшая расстояние между точками наблюдения, автор продолжает считать значения каждого из процессов в этих точках независимыми, а этого делать, вообще говоря, нельзя. В. Ф. Писаренко

10 В178. К вопросу об оптимальной статистической оценке характеристик канала связи с многолучевым распространением. Флейшман Б. С., Линковский Г. Б., Синдлер Ю. Б. «Сб. тр. Научно-техн. о-во радиотехн. и электросвязи им. А. С. Попова», 1959, вып. 3, 34—42

Рассматривается та же ситуация, что и в предыдущей работе авторов (реф. 10В176); ниже используются обозначения из этого реферата, но задача ставится другая. Истинное значение λ считается известным. Требуется дать оценку для дисперсии «мультипликативной» компоненты шума $\alpha_i(t)$. При тех же предположениях, что и в упомянутой работе, для нахождения оценки дисперсии применяется метод максимального правдоподобия и метод моментов. Отдельно рассмотрен случай, когда не все процессы $\alpha_i(t)$ одинаково распределены, а имеется процесс $\alpha_1(t)$, который превосходит по дисперсии все остальные $\alpha_i(t)$. Рассмотрено несколько примеров. Замечания о неясности формулировок, сделанные в реферате 10В176 (вместе с примечанием референта к этому же реферату), справедливы и для настоящей работы. В. Ф. Писаренко

10 В179. Непараметрический способ обнаружения постоянного сигнала в аддитивном шуме. Capon Jack. A nonparametric technique for the detection of a constant signal in additive noise. «IRE WESCON Convent. Rec.», 1959, 3, № 4, 92—103 (англ.)

Производится n независимых наблюдений случайной величины ξ: $x_1 \ldots x_n$. Проверяются две гипотезы относительно этой выборки. Гипотеза H_0: распределение ξ совпадает с распределением η — случайной величины с нулевым средним значением (шум). Гипотеза H_1: распределение ξ совпадает с распределением $\eta + \theta$, где θ — некоторая константа (сигнал). Кроме того, имеется в распоряжении еще одна выборка объема m независимых наблюдений случайной величины η. Функция распределения η неизвестна. Для проверки гипотез H_0 и H_1 рассматриваются критерии вида $f(U_{n,m}) > K$, где $f(x)$ — некоторая функция, K — константа, $U_{n,m}$ — некоторая статистика от $x_1, \ldots, x_n$ и от упоминавшейся выборки объема m. Рассматривается только такой класс критериев, где $f(U_{n,m})$ распределена асимптотически нормально, и вводится понятие относительной асимптотической эффективности двух критериев, которая, грубо говоря, равна отношению объемов выборок, требуемых для того, чтобы вероятности ошибок первого и второго родов для этих критериев были равны. Далее непараметрический критерий Вилкоксона сравнивается с некоторыми критериями, основанными на статистике $U_n = \frac{1}{n}\sum_1^n x_i$ (эти критерии будут оптимальными для случая, когда η имеет нормальное распределение). Оказывается, что при $n \to \infty$, $m \to \infty$, $\frac{m}{n} \to 0$ асимптотическая эффективность критерия Вилкоксона никогда не меньше 0,865 по отношению к критериям, основанным на $\frac{1}{n}\sum_1^n x_i$, а в некоторых случаях значительно превосходит ее (приведены примеры). В. Ф. Писаренко

10 В180. Определение минимально различимого отношения сигнала к помехе на входе радиометра. Чай-

ковский В. И. «Изв. высш. учебн. заведений. Радиотехника», 1958, № 6, 659—667

Определяется предельная чувствительность радиометра — прибора, позволяющего обнаруживать нормальный случайный сигнал на фоне случайных помех с теми же статистическими характеристиками. Вероятность правильного обнаружения сигнала оценивается через отношение мощности сигнала и мощности шума на входе. Б. Ф. Курьянов

Примечание редактора. Оценки основаны на неравенстве Чебышева и поэтому крайне грубы.

10 В181. Помехоустойчивость телеграфной связи по телефонному каналу тропосферной линии. Геренрот Е. Л. «Электросвязь», 1961, № 3, 3—7

Рассматривается использование телефонного канала радиорелейной линии для телеграфной связи. В предположении, что амплитуда сигнала на входе каждого участка канала и амплитуда шума на выходе распределены по закону Рэлея, вычисляется вероятность сбоя телеграфной посылки при однократном и многократном разнесенном приеме с автовыбором. В последнем случае предполагается, что сигналы, принимаемые различными антеннами, некоррелированы, а приемники идентичны. В. П. Яковлев

10 В182. Быстро сходящееся ортогональное представление для электроэнцефалограммы и связанные с ним методы автоматического анализа. Saltzberg Bernard, Burch Neil R. A rapidly convergent orthogonal representation for EEG time series and related methods of automatic analysis. «IRE WESCON Convent. Rec.», 1959, **3**, № 8, 35—41 (англ.)

Изучаются статистические свойства случайного процесса — электроэнцефалограммы (ээг). Ставится цель найти в ээг такие статистические параметры, которые были бы непосредственно связаны с различными физиологическими состояниями изучаемого индивидуума. Предлагается модель ээг, по которой участок записи между двумя последовательными нулями может быть представлен в виде быстро сходящегося ряда Грам—Шарлье, коэффициенты которого после усреднения и дают искомые статистические параметры. Для нахождения нужных параметров предлагается технически удобный приближенный метод, который заключается в измерении расстояний между последовательными нулями самой ээг и нескольких её производных. Как отмечают авторы, предварительные результаты предлагаемого подхода оказались успешными. Была обнаружена значительная корреляция между рассматриваемыми параметрами и некоторыми физиологическими состояниями, которые вызывались искусственно с помощью лекарств или недостатка кислорода. В. Ф. Писаренко

10 В183. Обобщение теории фильтрации Винера на системы с частичным дискретным преобразованием сигнала. Robbins H. M. An extension of wiener filter theory to partly sampled systems. «IRE Trans. Circuit Theory», 1959, **6**, № 4, 362—370 (англ.)

Использование счетных машин (СМ) в системах автоматического контроля приводит к необходимости дискретного преобразования сигнала перед вводом в СМ. В некоторых случаях дискретный сигнал на выходе СМ снова преобразуется в непрерывный. При расчете подобных систем возникает задача об определении таких ее характеристик, которые обеспечивают оптимальное выделение сигнала $f(t)$ из суммы сигнала и шума $f(t)+g(t)$. В предположении, что СМ эквивалентна некоторому линейному фильтру, автор рассматривает следующую идеализированную схему системы: сумма $f(t)+g(t)$ поступает на вход линейного фильтра с частотной характеристикой $K(s)$, после чего преобразуется в дискретную последовательность частоты Ω, поступающую на фильтр с частотной характеристикой $L(s)$. Требуется при заданных спектральных плотностях сигнала и шума, которые предполагаются рациональными функциями s, и заданной частоте Ω определить физически реализуемые частотные характеристики $K(s)$ и $L(s)$, обеспечивающие минимум среднеквадратического уклонения $\overline{e^2}=\overline{|h(t)-G_d[f(t)]|^2}$, где $h(t)$ – сигнал на выходе системы, $G_d[f(t)]$ – заданный линейный оператор. Задачу можно свести к нахождению двух непериодических функций частоты s и одной периодической — с периодом $2\pi/\Omega$. При обычных предположениях с использованием преобразования Лапласа находятся уравнения для определения характеристик системы и вычисляется минимальное уклонение $\overline{e^2}$. Подробно изучены случаи, когда частота дискретного преобразования Ω мала или велика по сравнению с граничными частотами линейных фильтров. Исследуются уравнения, полученные при отказе от физической реализуемости фильтров. Рассмотрены примеры. В. П. Яковлев

10 В184. Способы оптимального синтеза многомерных систем управления со случайными процессами на входах. Hsieh H. C., Leondes C. T. Techniques for the optimum synthesis of multipole control systems with random processes as inputs. «IRE Trans. Automat. Control.», 1959, **4**, № 3, 212—231 (англ.)

Рассматривается система, на входы которой подаются случайные процессы $i_k(t)=S_k(t)+n_k(t)$, где $S_k(t)$ — полезный сигнал, а $n_k(t)$ — помеха. Пусть $\varphi_{i_k, i_k}(\tau)$ — корреляционные и взаимные корреляционные функции суммарных сигналов (полезный сигнал + помеха) на входах; $\varphi_{i_k s_k}(\tau)$ — взаимные корреляционные функции суммарных сигналов и полезных сигналов на входах. Выходы системы

$$c_j(t)=\sum_{k=1}^{n}\int_0^\infty q_{jk}(\tau_1)\,d\tau_1\int_0^\infty p_{jk}(\tau_2)\,i_k(t-\tau_1-\tau_2)\,d\tau_2,$$

где $p_{jk}(\tau)$ — весовые функции заданных элементов, а $q_{jk}(\tau)$ — искомые оптимальные весовые функции изменяемых элементов. Желаемый выход оптимальной системы имеет вид

$$\zeta_j(t)=\sum_{k=1}^{n}\int_{-\infty}^{\infty} D_{jk}(\tau_3)\,S_k(t-\tau_3)\,d\tau_3.$$

Показано, что необходимым и достаточным условием оптимальности (в смысле минимума среднеквадратической ошибки) передаточных функций изменяемых элементов системы является удовлетворение соотношению

$$\sum_{k=1}^{n}\int_0^\infty p_{jk'}(\tau_2')\,d\tau_2'\int_0^\infty g_{jk}(\tau_1)\,d\tau_1\int_0^\infty p_{jk}(\tau_2)\,\varphi_{i_k,i_k}\times$$

$$\times(\tau_1'+\tau_2'-\tau_1-\tau_2)\,d\tau_2=\sum_{k=1}^{n}\int_0^\infty p_{jk}(\tau_2')\,d\tau_2'\int_{-\infty}^{\infty} D_{jk}(\tau_3)\times$$

$$\times\,\varphi_{i_k s_k}(\tau_1'+\tau_2'-\tau_3)\,d\tau_3. \qquad (3)$$

Посредством использования преобразования Лапласа решение этой системы уравнений сводится к решению системы линейных алгебраических уравнений. Н. Г. Назаров

10 В185. Статистическая динамика систем с пропорциональной экстремальной самонастройкой последовательных корректирующих устройств. Красовский А. А. «Изв. АН СССР. Отд. техн. н. Энерг. и автоматика», 1960, № 4, 121—129

Изучается динамика систем с экстремальной настройкой последовательных корректирующих устройств, представляющих собою набор параллельно соединенных линейных фильтров с переменными коэффициентами усиления, включенный последовательно с линейным объектом регулирования. В качестве экстремума берется ми-

нимум математического ожидания квадрата разности реакций эталонного фильтра и разомкнутого контура $M[\varepsilon^2]$. Уравнение при разомкнутых цепях самонастройки есть

$$M[\varepsilon^2] = \sum_{i,j=0}^{m} a_{ij} x_i x_j, \qquad (1)$$

где

$$a_{ij}(t) = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} K_i(t,\tau_1) K_j(t,\tau_2) R_\theta(\tau_1,\tau_2)\, d\tau_1 d\tau_2,$$

$K_i(t,\tau)$ — весовая функция i-й ветви разомкнутого контура, $R_\theta(\tau_1,\tau_2) = M[\theta(\tau_1)\theta(\tau_2)]$ — пробный сигнал, x_i — параметры настройки. Минимум (1) достигается при

$$x_j = \frac{1}{A}\sum_{\nu=1}^{m} A_{j\nu} a_{\nu 0},$$

где $A = |a_{ij}|\ (i,j = 1,2,\ldots)$, $A_{j\nu}$ — минор элемента j-го столбца и ν-й строки определителя A. При замкнутых цепях самонастройки получено уравнение

$$M[\varepsilon^2] - \min M\left[\varepsilon_p^2\right] = \sum_{i,j=1}^{m} a_{ij}\,\Delta\overline{x}_i'\,\Delta\overline{x}_j' + \sum_{i=1}^{m} a_{ii}\,\delta\overline{x}_i^2, \qquad (2)$$

где

$$\Delta\overline{x}_i' = -\frac{1}{A}\sum_{\nu}^{m} \frac{A_{i\nu}}{2\delta\overline{x}_i^2 W_\varphi(0)}\,\frac{dx_{\nu э}}{dt},$$

$$\delta\overline{x}_i^2 = M\left[\delta x_i^2\right],$$

$W_\varphi(0)$ — коэффициент усиления фильтра в цепи самонастройки, $\min M\left[\varepsilon_p^2\right]$ — минимум (1), $x_{\nu э}$ — значение параметра, при котором достигается минимум (1). Формула (2) позволяет оценить точность самонастройки в квазистационарном (когда параметры настройки изменяются медленно по сравнению с переходными процессами в системе) режиме сильной фильтрации (когда составляющие $\varepsilon^2\delta x_i$ практически полностью подавляются фильтрами самонастройки). Для квазистационарного режима общего случая дается краткое описание приближенного метода определения параметров самонастройки.

Н. Г. Назаров

10 В186. Обзор литературы по теории информации. Schmetterer Leopold. Literaturbericht zur Informationstheorie. «Bl. Dtsch. Ges. Versicherungsmath.», 1960, **4**, № 3, 259—266 (нем.)

Рассматривается в основном лишь математическая литература до 1958 г. включительно. Библ. 76 назв.

Р. Л. Добрушин

10 В187. Распределение срока службы и надежность системы с резервными компонентами. Morrison Donald F., David H. A. The life distribution and reliability of a system with spare components. «Ann. Math. Statistics», 1960, **31**, № 4, 1084—1094 (англ.)

Предполагается, что система состоит из $n+k$ однотипных элементов, n из которых начинают работать в момент $t=0$, а остальные элементы находятся в резерве. За время t непрерывной работы элемент может выйти из строя с вероятностью $F(t)$. Элементы, находящиеся в резерве, не выходят из строя (холодный резерв). Каждый вышедший из строя элемент заменяется резервным. Считается, что элементы выходят из строя независимо друг от друга. Основной целью работы является изучение различных характеристик случайной величины $L(n,k)$, которая равна моменту выхода из строя $k+1$-го элемента. Указывается, что такая постановка задачи возникает на практике. Относительный выигрыш от включения резервных элементов предлагается измерять показателем

$$a(n,k) = \frac{n\cdot ML(n,k)}{(n+k)\,ML(n,0)}.$$

Особое внимание уделяется случаю $n=2$. Значения $ML(n,k)$ и $a(n,k)$, сосчитанные для плотности вероятности момента выхода из строя отдельного элемента вида

$$f(x) = \frac{x^m}{m!}e^{-x},\ m = 0,1,\ldots,$$

для определенных значений параметров m, n, k сведены в таблицы. Результаты вычислений показывают, что при износовых отказах (случай больших значений параметра m) выигрыш $a(n,k)$ от добавления резервных элементов незначительный. Если $R_{n,k} = P\{L(n,k) > x\}$, то очевидно, $R_{n,0} = (1-F)^n$, $R_{n,1} = R_{n,0} + nR_{n-1,0}P_1$, где

$$P_1 = F_1(x) - F_2(x),\ F_k(x) = \int_0^{\lambda} F_{k-1}(x-s)\,dF(s).$$

Аналогичным образом можно рекуррентно выражать $R_{n,k}$ через $R_{n,k-1}$ и $R_{n-l,0}$, $l<n$. Указывается связь $ML(n,k)$, $k=1,2$, с порядковыми статистиками.

Примечание референта. В формуле (2.9) вместо $n-k+1$ надо читать $n-k-1$, а в формуле (3.6) вместо i надо читать k.

Ю. К. Беляев

10 В188. Оптимальные методы отыскивания неисправностей. Winter B. B. Optimal diagnostic procedures. «IRE Trans. Reliabil. and Qual. Control», 1960, **9**, № 3, 13—19 (англ.)

Система состоит из n элементов, которые могут ломаться. Для проверки наличия и отыскания неисправных элементов применяются тесты двух типов. В результате применения теста первого типа выявляется факт наличия хотя бы одного неисправного элемента. С помощью теста второго типа последовательно проверяется исправность каждого отдельного элемента. При обнаружении неисправности сломавшийся элемент заменяется идентичным ему исправным элементом. С целью выявления возможного наличия других неисправных элементов после каждой очередной замены применяется тест первого типа. Неисправность последнего непроверенного элемента выясняется на основе предыдущих испытаний. Предполагается, что при проведении тестовых испытаний число неисправных элементов не увеличивается. Перенумеруем все элементы некоторым образом, тогда любой метод отыскания неисправностей состоит в указании последовательности номеров элементов, в соответствии с которой будет происходить их проверка. Пусть p_i — априорные вероятности того, что элемент с номером i неисправен, T — стоимость теста первого типа, τ_i — стоимость теста второго типа, применяемого к i-му элементу, p_i — стоимость замены i-го элемента. В работе показано, что средние расходы, связанные с выявлением и устранением возникающих неисправностей, будут минимальными, если элементы перенумерованы так, что номер $i \leqslant j$, если

$$\frac{\tau_i}{p_i}q_i \leqslant \frac{\tau_j}{p_j}q_j,\quad q_l = 1-p_l,\quad l = i,j,$$

а проверка производится согласно последовательности $S_k = 1,2,\ldots,k-1,k+1,\ldots,N,k$. Номер k находится из условия

$$g(S_k) = \min_{1\leqslant j\leqslant N}\{g(S_j)\},$$

$$g(S_j) = p_j\left[\sum_{i=1}^{N}\tau_i Q_i - T\right],\quad Q_i = \prod_{j=i}^{N} q_j.$$

Рассмотрен также ряд родственных задач. Приводится численный пример.

Примечание референта. Пункт IV А написан нечетко, в формуле (6) этого пункта надо читать $T\cdot\sum_{i=1}^{N}p_i+\sum_{i=1}^{N}p_ip_i$ вместо $\left(T+\sum_{i=1}^{N}p_i\right)\cdot\sum_{i=1}^{N}p_i$, имеются также другие несущественные опечатки. Ю. К. Беляев

10 В189. Оптимальный резерв, обеспечивающий максимальную надежность системы. Gordon Robert. Optimum component redundancy for maximum system reliability. «Operat. Res.», 1957, 5, № 2, 229—243 (англ.)

Предполагается, что функционирование системы состоит из трех этапов. 1 этап — система выключена, 2 этап — система включена и выполняет некоторую работу, 3 этап — система снова выключена. Неисправностью будет как отключение системы на 2 этапе, так и ложное включение системы на первом или третьем этапах. Пусть с вероятностью p_1 происходит ложное включение системы на 1 или 3 этапах, $p_1+p_3=1$, а с вероятностью p_4 не происходит включение на 2 этапе, $p_2+p_4=1$. Нормальное функционирование системы на всех этапах происходит с вероятностью $c=p_2\cdot p_3^2$, система выключена на всех этапах с вероятностью $a=p_4\cdot p_3^2$. Пусть теперь имеется резерв из m независимых однотипных систем. Правильное функционирование m систем происходит только в том случае, когда все они не дают ложных включений и хотя бы одна из них на трех этапах функционирует нормально. Вероятность правильного функционирования такой совокупности систем равна $(a+c)^m-a^m$. Указывается возможность применения этой модели к управляемым ракетным снарядам. Дана приближенная методика отыскания оптимального числа резервных систем. Результаты вычислений иллюстрируются на графиках. Ю. К. Беляев

10 В190. Статистические процедуры принятия испытаний на долговечность. Epstein Benjamin. Statistical life test acceptance procedures. «Technometrics», 1960, 2, № 4, 435—446 (англ.)

Популярное изложение с числовыми примерами результатов, полученных в других работах автора (РЖМат, 1956, 5383, 7527, 8177) относительно проверки гипотез о среднем времени жизни объекта с экспоненциальным распределением времени жизни при различных планах проведения испытаний. Р. Л. Добрушин

10 В191. Оценка по данным испытания на долговечность. Epstein Benjamin. Estimation from life test data. «Technometrics», 1960, 2, № 4, 447—454 (англ.)

Пусть $f(x,\theta)=\frac{1}{\theta}e^{-x/\theta}$, $x\geqslant 0$, $\theta>0$ — плотность вероятности долговечности X; n — число одновременно испытываемых объектов, r — число отказов за время испытания, T_n — суммарное время жизни всех испытываемых объектов к моменту прекращения испытания. Рассматриваются случаи: 1) Испытание прерывается после фиксированного числа r отказов (с заменой или без замены отказавших объектов); даются 100 $(1-\alpha)$% доверительные интервалы для θ, $p_t^*=P(X>t^*)$ и x_p, где x_p удовлетворяет условию $P(X>x_p)=p$, основанные на T_n. 2) Испытание (с заменой или без замены) прерывается после того, как T_n впервые примет заданное значение; даются 100 $(1-\alpha)$% доверительные интервалы для θ и x_p, основанные на r. 3) На протяжении фиксированного времени t^* испытываются одновременно n объектов (без замены); дается 100 $(1-\alpha)$% доверительный интервал для θ, основанный на числе объектов, доживших до момента t^*. 4) Объекты испытываются последовательно t^* единиц времени каждый. Испытание прекращается, когда появляется r отказов; дается 100 $(1-\alpha)$% доверительный интервал для θ, основанный на общем числе испытанных объектов. В случаях 3 и 4 указывается также непараметрический доверительный интервал для вероятности того, что время жизни объекта больше t^*. Л. С. Трофименко

10 В192. Нецентральный t-тест (q-тест) с применением размаха выборки вместо стандартного отклонения. Zaludova Agnes H. The non-central t-test (q-test) based on range in place of standard deviation. «Acta techn. (CSR)», 1960, 5, № 2, 143—185 (англ., рез. русск.)

Рассматривается выборка объема $N=mn$ из совокупности независимых одинаково распределенных нормальных величин, разделенная на m подвыборок объема n каждая. Строится нецентральная выборочная характеристика $q(m,n)=\frac{T-\bar{x}'}{\omega'(m,n)}$, где T — верхняя граница допуска, $\bar{x}'$ — среднее арифметическое выборки объема $N=mn$, а $\omega'=\frac{1}{m}\sum_{j=1}^{n}\omega_j'$, где ω_j' — размах j-й подвыборки. Найдена функция распределения величины q, протабулированы критические значения q_ε для уровня вероятностей $\varepsilon=0{,}05;\ 0{,}25;\ 0{,}75;\ 0{,}95$. Проиллюстрирован способ применения таблиц для проверки гипотезы, касающейся процента брака в партии изделий. Полученный критерий сравнивается с некоторыми известными критериями. Б. Н. Гартштейн

10 В193. Критерий значимости для доли дефектных изделий, использующий сжимающиеся пределы. Akao Youji. A significance test for the fraction defective using the compressed limit. «Repts Statist. Applic. Res., Union Japan. Scientists and Engrs», 1959, 6, № 2, 67—81 (англ.)

Предлагается критерий для проверки простой гипотезы о среднем нормального распределения против простой же альтернативы (дисперсии известны и одинаковы); он основан на методе «сжимающихся пределов», используемом в выборочном контроле. Этот метод состоит в том, что признаются «дефектными» изделия, параметры которых выходят из некоторых пределов, более узких, чем первоначально заданные. А. М. Каган

10 В194. О времени простоя паровозов. Sarkadi Károly. Mozdonyok várakozási idejeröl. «A magyar tud. akad. Alkalm. mat. int. közl.», 1954(1955), 3, № 1-2, 191—194 (венгр.; рез. русск., англ.)

Пусть на станцию прибывает ежедневно n поездов и отбывает такое же количество поездов (но с новыми паровозами). Спрашивается, каково будет среднее время ожидания одного паровоза? При условии, что: а) будет такой момент в течение дня, когда на станции нет ни одного паровоза, б) моменты прибытия и отбытия паровозов, по графику, рассматриваются как $2n$ эквивалентных случайных величин, — получается, что математическое ожидание времени простоя одного паровоза равно $\frac{1}{2n}\left\{\frac{4^n}{\binom{2n}{n}}-1\right\}$. (Используется результат Б. В. Гнеденко, В. С. Королюка (Докл. АН СССР, 1951, 80, 525)). М. Арато

10 В195. Испытание как экономное вспомогательное средство руководства производством. Теоретическое объяснение и результаты опытов на немецких железных дорогах. Haidmann Martin. Stichproben als kostensparendes Hilfsmittel der Betriebsführung. Theoretische Erläuterungen und Ergebnisse eines Versuches bei der Deutschen Bundesbahn. «Arch. Eisenbahntechn.», 1958, № 11, 2—12 (нем.; рез. англ., франц., исп.)

Популярная статья с приложениями к железнодорожной технике. Р. Л. Добрущин

10 В196. Проверка сырья, взятие проб и математическая статистика на малых и средних химических фабриках. Oesterle K. M. Rohstoff-Kontrolle, Probennahme und mathematische Statistik der kleinen und mittleren Lackfabrik (UDK-LF 51 Statist. Math.). «Schweiz. Arch. angew. Wiss. und Techn.», 1961, **27**, № 1, 36—46 (нем., рез. франц.)

Для одной серии и для совокупности серий испытаний определяются эмпирическое среднее и эмпирическая дисперсия, наглядно объясняется критерий Стьюдента, определяется минимальное число испытаний, необходимое для его применения с определенным уровнем значимости. Приводятся примеры применения критерия Стьюдента в химической промышленности.

А. Х. Заславский

10 В197. Вероятностные идеи в водном хозяйстве. Wöhr Fritz. Der Wahrscheinlichkeitsbegriff in der Wasserwirtschaft. «Elektrizitätswirtschaft», 1961, **60**, № 6, 172—174 (нем.; рез. англ., франц.)

Краткий обзор методов расчета водных ресурсов.

А. Х. Заславский

10 В198. Одна модель из пробит-анализа. Kudô Akio, Furukawa Nagata. A model in probit analysis. «Bull. Math. Statist.», 1958, **8**, № 1-2, 1—7 (англ.)

Обычно предполагается, что при действии дозы x (например, некоторого яда) испытуемый индивид имеет вероятность P среагировать (умереть), которую представляют в следующей форме, зависящей от трех параметров:

$$P = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\alpha+\beta x-\mu} e^{-\frac{1}{2}u^2}\, du.$$

В статье рассматривается задача оценки этих параметров по совокупности k серий испытаний с уровнями $x_1, \ldots, x_k$, в предположении, что неизвестно число испытаний $n_1, \ldots, n_k$, а известно лишь число прореагировавших в каждой серии. В предположении, что n_i велики, используется теорема о распределении наименьшего члена в вариационном ряду. При небольших объемах n_i предполагаются распределенными по закону Пуассона. О. М. Калинин

10 В199. Установление неоднородности индивидов в серии разбавлений с единичными наблюдениями. Armitage P., Bartsch G. E. The detection of host variability in a dilution series with single observations. «Biometrics», 1960, **16**, № 4, 582—592 (англ.)

Биологические объекты подвергаются введению раствора частиц. Каждая из частиц, независимо от других, может вызвать с вероятностью p у данного индивида заболевание. В статье рассматривается критерий проверки гипотезы одинаковой восприимчивости организмов к заболеванию (p=const) в серии двукратно разбавляемых растворов, с одним наблюдением для каждого разбавления. Приводятся графики кривых мощности двух критериев. Критерии основываются на подсчете числа наблюдений до первого заболевания. О. М. Калинин

10 В200. Число пораженных красной гнилью мест на средней жилке листа сахарного тростника. Srivastava Jagdish Narain. The number of red rot lesions on the mid-rib of sugarcane leaves. «J. Indian Soc. Agric. Statist.», 1957, **9**, № 1, 52—60 (англ.)

Автор исследует количество x пятен (инфекционного происхождения) на листьях сахарного тростника (а именно на средней жилке листа). Распределение случайной величины x не отличается существенно (автор доказывает это применением критерия χ^2) от распределения:

$$y_x = (1-p)\, p^{x-1},\ x > 0,$$

параметр p оценен автором методом наибольшего правдоподобия: $\hat{p} = \bar{x} - 1/\bar{x}$, где $\bar{x}$ — среднее число пятен на листе. Автор находит доверительный интервал для p и распределение оценки $\hat{p}$. J. Perkal

10 В201. Сравнение теоретических и эмпирических результатов для некоторых стохастических моделей популяций. Bartlett M. S., Gower J. C., Leslie P. H. A comparison of theoretical and empirical results for some stochastic population models. «Biometrika», 1960, **47**, № 1-2, 1—11 (англ.)

Рассматриваются процессы рождения и смерти с малой вероятностью полного вымирания. Такие процессы приближенно можно рассматривать как стационарные на большом промежутке времени. Для одномерных процессов с дискретным и непрерывным временем вычисляются первые три момента «квазистационарного» распределения. Для двумерного процесса формулы для первого приближения были вычислены двумя из авторов ранее. Даются способы вычисления вероятности изчезновения для одномерного и двумерного процессов. Процессы с дискретным временем моделируются методом Монте-Карло. Моменты, вычисленные по искусственным реализациям, хорошо совпадают с моментами, выявленными по теоретическим формулам. О. М. Калинин

10В202. Свойства вероятностных моделей взаимодействия двух видов типа хищник—жертва. Leslie P. H., Gower J. G. The properties of a stochastic model for the predator-prey type of interaction between two species. «Biometrika», 1960, **47**, № 3-4, 219—234 (англ.)

На электронных вычислительных машинах Ротамстэдской экспериментальной станции строились искусственные реализации для моделей, указанных в заглавии. Для одних значений параметров наблюдались флуктуации циклического характера, для других значений состояние модели оказывалось неустойчивым и искусственные реализации приводили к исчезновению одного из видов. Моделировалась также система с наличием укрытия у жертвы. Обсуждаются результаты изучения подобных систем в лабораторных условиях (с простейшими Г. Ф. Гаузе 1934, 1935 и с клещами C. B. Huffaker. 1958). О. М. Калинин

10 В203. Некоторые аспекты оптимального хищничества в экологии и разведении крупного рогатого скота. Bellman Richard, Kalaba Robert. Some mathematical aspects of optimal predation in ecology and boviculture. «Proc. Nat. Acad. Sci. U. S. A.», 1960, **46**, № 5, 718—720 (англ.)

Популяция I питается индивидами популяции II. Экспериментатор может регулировать размеры популяции I при помощи некоторого яда. $w(t)$ — степень применения яда в момент t, $u(t)$ (соответственно $v(t)$) — размеры популяции I (соответственно II) в момент t. Состояние популяции описывается следующими дифференциальными уравнениями и начальными условиями:

$$\dot{u} = k_1(w(t))\, u,\ u(0) = c_1,$$

$$\dot{v} = k_2(w(t))\, v,\ -k_3(w(t))\, u,\ v(0) = c_2.$$

Вводится «нежелательность» (undesirability) наших двух популяций в момент t, даваемая выражением $a_1u(t)+a_2v(t)$. Ищется функция $w(t)$ на промежутке наблюдения $0 \leqslant t \leqslant T$ такая, чтобы функционал

$$\max_{0 \leqslant t \leqslant T} \{a_1 u(t) + a_2 v(t)\}$$

имел наименьшее значение. Для функции

$$f(c_1, c_2, T) = \min_{w} \max_{0 \leqslant t \leqslant T} \{a_1 u(t) + a_2 v(t)\}$$

выводится обычное для динамического программирования уравнение. Аналогичным образом рассматривается задача об оптимальной политике разведения стада. Обещаются дополнительные статьи по этим вопросам.

О. М. Калинин

10 В204. Метод анализа логарифмически нормально распределенных данных выживания с наличием неизвестных исходов. Feinleib Manning. A method of analyzing log-normally distributed survival data with incomplete follow-up. «J. Amer. Statist. Assoc.», 1960, **55**, № 291, 534—545 (англ.)

Изучается время жизни x индивидуумов после первой регистрации определенного заболевания. Предполагается, что величина $\log(x-a)$ распределена нормально. Ставится задача об оценивании трех неизвестных параметров (параметр a и параметры нормального распределения) по наблюдениям в том случае, когда судьба некоторых пациентов неизвестна. Предлагается один эвристический прием, заимствованный у специалистов по страховому делу. Полученный метод оценки совпадает с методом максимума правдоподобия, когда судьбы всех пациентов известны. Обрабатываются данные по лейкемии. О. М. Калинин

10 В205. Вероятностный метод изучения таблиц длительности жизни и приложения этих таблиц. I. Вероятностные распределения биометрических функций. Chiang Chin Long. A stochastics study of the life table and its applications. I. Probability distributions of the biometric functions. «Biometrics», 1960, **16**, № 4, 618—635 (англ.)

В некоторой популяции рассматривается процесс чистой гибели. Приводятся хорошо известные формулы для распределения числа индивидуумов, доживших до возраста x, и совместного распределения числа случаев смерти, наступивших в непересекающиеся промежутки времени $[t_i, t_{i+1}]$. При некоторых естественных допущениях показано, что продолжительность жизни индивидуума после момента t_i асимптотически нормальна.
М. Г. Шур

10 В206. Несмещенный выбор и оценочная процедура для учета рыбы в корзинках рыбаков. Robson D. S. An unbiased sampling and estimation procedure for creel censuses of fishermen. «Biometrics», 1960, **16**, № 2, 261—277 (англ.)

Популяция рыбаков на данном озере или реке в период рыбного сезона рассматривается расслоенной в пространстве и во времени. С помощью учетчиков выборочно обследуются слои. В каждом слое учитываются человеко-часы рыбной ловли (усилия) и пойманная рыба (улов). Даются оценки количества усилий и количества пойманной рыбы. Для вычисления компонент дисперсий оценок используется аппарат многоразмерных кумулянтов (поликеев). О. М. Калинин

10 В207. Теория классов смертности. Дискуссия. Levinson Louis, Sarason Harry M. A theory of mortality classes. Discussion. «Soc. Actuar. Trans.», 1959, **11**, № 29A—29B, 46—87 (англ.)

Статья относится к демографической статистике. Подробно выясняются причины, от которых зависит вероятность человеку умереть. Население следует делить на большое число классов, каждый из которых можно считать однородным, в смысле одинаковой вероятности смерти для каждого индивидуума. Вводятся многочисленные обозначения для численностей различных подклассов, для вероятностей перехода из класса в класс, для вероятностей остаться в живых, скорости изнашиваемости организма человека и аналогичных понятий. Приводятся алгебраические зависимости между ними. Дается большой табличный материал. В заключительных замечаниях, принадлежащих Сарансону, подчеркивается важность введенных в статье понятий для страховой науки, а также для криминологии, социологии, экономики. О. М. Калинин

10 В208. О вычислении скорости мутации и селекции с учетом малых миграций. Malecot G. Sur l'estimation des taux de mutation et de selection, compte tenu des migrations. «Cahiers rhodaniens», 1957—1958, № 8, 1—9 (франц.)

Изменение концентрации гена в популяции обычно описывается уравнением диффузии. В настоящей работе рассматривается популяция, состоящая из отдельных колоний, между которыми имеются небольшие миграции. При некоторых предположениях выводятся коэффициенты многомерного уравнения диффузии.
О. М. Калинин

10 В209. Эффективность отбора семьями. Rajagopalan M. Effeciency of family selection. «J. Indian Soc. Agric. Statist.», 1958, **10**, № 1-2, 41—54 (англ.)

Получены выражения для эффективности отбора семьями полных сибсов и семьями от самца, когда неодинаковое число самок скрещивается с каждым самцом и каждая самка производит неодинаковое число потомков. Применяется, как обычно, метод дисперсионного анализа. Дисперсия признака, по которому ведется отбор, раскладывается на компоненты, а через эти компоненты определяется наследуемость признака и эффективность отбора. Вычислены индексы, по которым следует вести отбор, и вычислена эффективность отбора по этим индексам. Результаты иллюстрируются примером из овцеводства. О. М. Калинин

10 В210. Непараметрический асимптотический метод оценки, проверки гипотез и построения доверительных пределов для «наследуемости». Schwartz Lorraine, Wearden Stanley. A distribution-free asymptotic method of estimating, testing, and setting confidence limits for heritability. «Biometrics», 1959, **15**, № 2, 227—235 (англ.)

Изучается критерий для проверки наследования некоторого признака. Будем считать множества индивидуумов упорядоченными по этому признаку; назовем рангом данного индивидуума число индивидуумов в множестве, не превосходящих данного, и средним рангом какого-либо подмножества — среднее арифметическое рангов его элементов. Разобьем группу из N родителей на две группы по $N/2$ индивидуумов, причем к одной группе (высокой) отнесем больших индивидуумов, а к другой (низкой) — меньших. Через a_2 и a_1 обозначим средние ранги этих групп, а через b_2 и b_1 — средние ранги (в множестве потомков) высокой и низкой групп потомков. Положим $H_r = f\dfrac{b_2-b_1}{a_2-a_1}$, где $f=1$, если селекция произведена по обоим родителям, и $f=2$, если по одному. Наследуемостью автор называет среднее значение этой статистики. Наследование отсутствует, если оно равно нулю. Показано, что

$$H_r = 2f\frac{n_1+n_2}{N}\left(\frac{1}{2}-\frac{u}{n_1 n_2}\right),$$

где n_1 и n_2 — число потомков низкой и высокой групп, u — число случаев, когда какой-нибудь потомок высокой группы оказывается меньше какого-нибудь потомка низкой группы. Статистика u рассмотрена Манном и Уитни (Mann H. B., Whitney D. R., Ann. Math. Statistics, 1947, **18**, 50). В. Н. Тутубалин

10 В211. Замечание о функции мощности X_n-критерия в генетике. Bennett B. M. Note on the power function of the X_n. Test in genetics. «Skand. aktuarietidskr.», 1959, № 1-2, 1—5 (англ.)

Рассматривается n испытаний, в которых k раз появилось событие E (например, рождение дефективного потомка), p_i — вероятность появления E в i-м испытании. Для проверки гипотезы H_0 о равенстве всех p_i, против альтернативы $H_{t'}$ о систематическом изменении этих вероятностей: $\tau_i = \log\dfrac{p_i}{1-p_i} = \tau + (i-1)\lambda$, был предложен критерий X_n, основанный на подсчете суммы номеров моментов появления события E (Haldane J. B. S., Ann. Eugenics, 1948, **14**, 117 — 124). В

статье вычисляется функция мощности этого критерия для нескольких комбинаций λ, n, k и уровней значимости. О. М. Калинин

10 В212. Одна модель для анализа распределения качественных признаков в семьях из сибсов. Gittelsohn A. M. A model for the analysis of the distribution of qualitative characters in sibships. «Biometrics», 1960, **16**, № 4, 534—546 (англ.)

Число детей у супружеской пары зависит от плодовитости, поставленных идеалов, числа уже произведенных дефективных детей, качества противозачаточных средств. Формализуя эти рассмотрения и учитывая разные способы сбора материала по статистике семей и разные способы регистрации дефективных детей, автор находит методом максимума правдоподобия оценки введенных параметров. Распределение количества детей в семье следует отрицательно — биномиальному закону. О. М. Калинин

10 В213. Равновесие в популяции с частичным перекрестным опылением. Sanchez-Monge E. Equilibrio en poblaciones parcialmente alogamas. «Bol. Inst. nac. invest. agron.», 1958, **18**, № 38, 295—300 (исп., рез. англ.)

Рассматривается биологическая популяция, в которой имеется три различных генотипа AA, Aa, aa: особь генотипа AA имеет лишь гены типа A; особь генотипа aa имеет лишь гены типа a; особь генотипа Aa имеет гены обоих типов. Заданы относительные доли генов A и a в популяции (s и $1-s$). Задана пропорция (α), в которой происходит перекрестное опыление (в пропорции $1-\alpha$ особи самоопыляются). Заданы относительные объемы (p_n, q_n, r_n) трех генотипов в n-м поколении. Задан способ размножения особей, принадлежащих к различным генотипам. Автор решает задачу нахождения таких чисел p_n, q_n, r_n (в зависимости от S и α), что при переходе от n-го к $(n+1)$-му поколению: $p_{n+1} \equiv p_n \equiv p$; $q_{n+1} \equiv q_n \equiv q$; $r_{n+1} \equiv r_n \equiv r$. Р. Ф. Матвеев

10 В214. Обобщение формулы произведения. Seal K. C. Generalization of product formula. «J. Indian Soc. Agric. Statist.», 1957, **9**, № 1, 31—40 (англ.)

В поколении F_2, т. е. в потомстве, полученном от скрещивания некоторых гибридов, наблюдаются четыре класса генотипов: AB, Ab, aB и ab. Обозначим их теоретические вероятности через p_1, p_2, p_3 и p_4. Если вероятности p_i рассматривать как известные функции от так называемого фактора рекомбинации p: $p_i = g_i(p)$, то последний можно оценить по наблюденным частотам генотипов методом максимального правдоподобия. Автор выводит целый класс оценочных процедур, приводящих к асимптотически эффективным оценкам (к этому классу относится и оценка, основанная на известной формуле произведения). Одна из этих оценок имеет простую форму и имеет преимущество перед другими, а именно она менее чувствительна к ошибкам, связанным с неправильным причислением индивидуумов к генотипным классам. J. Perkal

10 В215. Использование функции мощности для определения числа потомков, приходящихся на самца, в генетических экспериментах, включающих полусибсов. Wearden Stanley. The use of the power function to determine an adequate number of progeny per sire in a genetic experiment involving half-sibs. «Biometrics», 1959, **15**, № 3, 417—423 (англ.)

Решается задача о числе полусибсов данных самцов, необходимом для выявления существенного различия между самцами по рассматриваемому признаку, при условии, что наследуемость этого признака не меньше некоторого числа. Применяется техника дисперсионного анализа. Для расчетов используется функция мощности F-критерия. О. М. Калинин

10 В216. Модель обнаружения и распознавания не вполне определенного сигнала. Shipley Elizabeth F. A model for detection and recognition with signal uncertainty. «Psychometrika», 1960, **25**, № 3, 273—289 (англ.)

Известно, что акустический сигнал в шуме легче обнаруживается, когда наблюдатель знает частоту сигнала, чем когда известно только множество возможных частот. Возникает вопрос о выборе статистической модели опыта по обнаружению сигнала, в которой некоторые параметры определяются условиями опыта, а некоторые зависят только от наблюдателя. Пусть, например, сигнал S появляется в одном из двух временных интервалов R_1 и R_2, а наблюдателю нужно указать, в каком именно. Обозначим через v отношение $\frac{P_{NN}(R_2)}{P_{NN}(R_1)}$, где $P_{NN}(R_i)$ — вероятность того, что наблюдатель укажет i-й интервал, когда на самом деле имеется только шум и в R_1, и в R_2. Пусть, далее,

$$\frac{P_{SN}(R_1)}{P_{NN}(R_1)} = \frac{P_{NS}(R_2)}{P_{NN}(R_2)} = \alpha',$$

$$\frac{P_{SN}(R_2)}{P_{NN}(R_2)} = \frac{P_{NS}(R_1)}{P_{NN}(R_1)} = \alpha'',$$

где $P_{SN}(R_i)$, $P_{NS}(R_i)$ — аналогичные вероятности при условии, что сигнал приходит в первом (соответственно втором) из интервалов и $\alpha = \alpha'/\alpha''$. Тогда вероятности ответов наблюдателя при различных условиях выражаются через v и α, причем предлагается считать, что α зависит от характеристик сигнала, а v от наблюдателя (например, v определяется желанием минимизировать средние потери). В. Н. Тутубалин

10 В217. Многократные наблюдения сигналов в шуме. Swets John A., Shipley Elizabeth F., McKey Molly J., Green David M. Multiple observations of signals in noise. «J. Acoust. Soc. America», 1959, **31**, № 4, 514—521 (англ.)

Анализируется процесс слухового обнаружения сигналов в шумах при использовании звуковых стимулов на выходе и реакций наблюдателя. Работа уха в качестве обнаруживающего устройства сравнивается с результатами теории многоальтернативного оптимального обнаружения. Показано, что при N наблюдениях сигнала обнаружение улучшается, как и предсказывает теория, как $\sqrt{N}$, если помехи в каждом наблюдении независимы. При совпадающих помехах, вопреки теории, происходит небольшое улучшение обнаружения, что авторы объясняют наличием «внутреннего шума» слуховой системы, и это улучшение позволяет оценить величину внутреннего шума. По экспериментам с одновременным наблюдением множества сигналов различных частот оцениваются две модели частотного анализа, проводимого слуховой системой: модели узкополосного «сканирующего» фильтра и многополосного фильтра. Результаты эксперимента показывают, что ни одна из этих моделей не дает полного объяснения поведения слуховой системы при различных условиях. Б. Ф. Курьянов

10 В218. Обзор результатов по коллективной теории риска. Segerdahl Carl-Otto. A survey of results in the collective theory of risk. «Probability and statistics. Stockholm, Armqvist and Wiksell; New York. John Wiley and Sons», 1959, 276—299 (англ.)

Рассматривается математическая модель процесса, возникающего при страховании:

$$X(t) = P_1 \cdot t - Y(t),$$

где $Y(t)$ — по-видимому (из-за нечетких формулировок нельзя установить точно, о чем идет речь), процесс с

независимыми приращениями, который изменяется только скачками (скачки имеют функцию распределения $F(x)$);

$$P_1 = \int_{-\infty}^{\infty} x dF(x).$$

Дается обзор результатов относительно некоторых свойств процесса $X(t)$. В. Ф. Писаренко

10 В219 К. Проблемы передачи информации. Вып. 3. Координатные системы АТС (Лабор. систем передачи информ. АН СССР). М., АН СССР, 1959, 148 стр., илл. 6 р. 80 к.

См. также: 10А25, 10А26, 10А100 К, 10А182, 10Б19, 10Б27, 10Б144, 10Б229, 10Б315, 10Б323, 10Б334, 10В269, 10В280, 10В284, 10В289, 10В290, 10В323, 10В325, 10В326, 10В346 К

ЧИСЛЕННЫЕ И ГРАФИЧЕСКИЕ МЕТОДЫ

Редактор *В. К. Саульев*

10 В220. Приближенное решение дифференциальных уравнений с запаздывающим аргументом. Шаркова Н. В. «Уч. зап. Пермск. ун-т», 1959, **13**, № 2, 63—73

Метод «осциллирующих функций» С. И. Мельника (РЖМат, 1957, 5942), примененный им для решения обыкновенных линейных дифференциальных уравнений, используется здесь для численного решения начальной и краевой задач для линейных дифференциальных уравнений со строго положительным запаздыванием. Автор пользуется тем, что при решении такого уравнения методом шагов на каждом шаге получается уравнение без запаздывания. Приведены оценка ошибки и примеры. А. Д. Мышкис

10 В221. О коэффициенто-устойчивости разностных схем. Тихонов А. Н., Самарский А. А. «Докл. АН СССР», 1960, **131**, № 6, 1264—1267

Если при решении разностных краевых задач коэффициенты разностных уравнений заданы неточно, то желательно, чтобы при малых изменениях в коэффициентах решение задачи менялось мало; в статье рассматривается вопрос об устойчивости решения разностных краевых задач относительно коэффициентов схем (о коустойчивости), соответствующих краевой задаче на отрезке $0 \leqslant x \leqslant 1$:

$$L^{(p,q,f)} u = \frac{d}{dx}\left[\frac{1}{p(x)}\frac{du}{dx}\right] - q(x)u + f(x) = 0, \quad 0 < x < 1, \qquad (1)$$

$$u(0) = \mu_1, \quad u(1) = \mu_2.$$

Коэффициенты уравнения (1) принадлежат классу Q_0 кусочно-непрерывных функций и удовлетворяют условиям

$$0 < K_1 \leqslant p(x) \leqslant K_2, \quad 0 \leqslant q(x) \leqslant K_2, \quad |f(x)| \leqslant K_2.$$

Рассматриваются схемы вида

$$L_h^{(p,q,f)} y_i = \frac{1}{h^2}\left[(y_{i+1} - y_i)/B_i^h - (y_i - y_{i-1})/A_i^h\right] - D_i^h y_i + F_i^h = 0, \; i = 1, 2, \ldots N-1,$$

$$y_0 = \mu_1, \quad y_N = \mu_2, \qquad (2)$$

где функционалы A^h, B^h, D^h и F^h удовлетворяют определенным условиям (РЖМат, 1960 1В244 1В245; см. там же некоторые употребляемые ниже определения). Вводятся следующие определения: разностная схема (2) удовлетворяет принципу коустойчивости, если из условий

$$\sum_{i=1}^{N-1} \left|\widetilde{A}_i^h - A_i^h\right| h = O(\rho(h)),$$

$$\sum_{i=1}^{N-1} \left|\widetilde{B}_i^h - B_i^h\right| h = O(\rho(h)),$$

$$\sum_{i=1}^{N-1} \left|\widetilde{D}_i^h - D_i^h\right| h = O(\rho(h)),$$

$$\sum_{i=1}^{N-1} \left|\widetilde{F}_i^h - F_i^h\right| h = O(\rho(h)),$$

где $\rho(h) \to 0$ при $h \to 0$, следует сходимость решения $\widetilde{y}_i$ разностной краевой задачи (2), в которой вместо коэффициентов A^h, B^h, D^h, F^h подставлены $\widetilde{A}^h$, $\widetilde{B}^h$, $\widetilde{D}^h$, $\widetilde{F}^h$, к решению $u(x)$ задачи (1), т. е. $|\widetilde{y}_i - u(x_i)| \leqslant \leqslant \rho_0(h) \to 0$ при $h \to 0$. Если $\rho(h) = O(h^n)$, то имеет место принцип коустойчивости n-го ранга. Доказаны следующие основные теоремы:

Теорема 4. Необходимым и достаточным условием коустойчивости канонической схемы $L_h^{(p,q,f)}$ является ее консервативность.

Теорема 5. Любая консервативная схема $L_h^{(p,q,f)}$ имеет 1-й интегральный порядок точности в классе Q_0^1, Q_m^γ $(0 \leqslant \gamma \leqslant 1)$ — класс функций, имеющих на $[0, 1]$ m кусочно-непрерывных производных, причем m-я производная удовлетворяет в интервалах ее непрерывности условию Гельдера порядка γ.

Теорема 6. Существует единственная каноническая схема («наилучшая консервативная схема»), имеющая второй интегральный порядок точности в $Q^{(1)}$ и удовлетворяющая принципу коустойчивости 2-го ранга; эта схема $L_h^{(p,q,f)}$ консервативна и определяется при помощи функционалов

$$A(\psi) = \int_{-1}^{0} \psi(s)\,ds, \quad D(\psi) = F(\psi) = \int_{-0,5}^{0,5} \psi(s)\,ds.$$

Показано, что в случае разрывных коэффициентов решение разностной краевой задачи (2) не имеет при $h \to 0$ асимптотики 2-го порядка. В. И. Лебедев

10 В222. Применение метода осциллирующих функций к приближенному решению краевых задач для дифференциальных уравнений второго порядка. Шаркова Н. В. «Уч. зап. Пермск. ун-т», 1959, **13**, № 2, 41—61

Развитый в работах С. И. Мельника (РЖМат, 1954, 5256; 1957, 5942, 5943) метод осциллирующих функций применяется для приближенного решения линейного дифференциального уравнения второго порядка

$$y'' = p(x)y' + q(x)y + r(x)$$

с краевыми условиями

$$R_1[y] \equiv \alpha_1 y(0) + \alpha_1' y'(0) + \beta_1 y(1) + \beta_1' y'(1) = 0,$$

$$R_2[y] \equiv \alpha_2 y(0) + \alpha_2' y'(0) + \beta_2 y(1) + \beta_2' y'(1) = 0,$$

где $p(x)$, $q(x)$ и $r(x)$ — дифференцируемые на сегменте $[0, 1]$ функции и ранг матрицы

$$\begin{pmatrix} \alpha_1 & \alpha_1' & \beta_1 & \beta_1' \\ \alpha_2 & \alpha_2' & \beta_2 & \beta_2' \end{pmatrix}$$

равен 2. Дана оценка приближенного решения (в предположении, что известна оценка для функции Грина). Для уравнения $y'' = q(x)\,y + r(x)$ с условиями $y(0) = y(1) = 0$ оценку погрешности можно получить, не прибегая к функции Грина. Метод осциллирующих функций применяется для нахождения собственных значений краевых задач и к приближенному решению задачи Коши и краевой задачи (при некоторых ограничениях) для нелинейного дифференциального уравнения $y'' = f(x, y, y')$. Рассмотрены примеры. Д. Б. Тополянский

10 В223. Оценки погрешности метода Ритца для неоднородного дифференциального уравнения. Джишкариани А. В. «Сообщ. АН ГрузССР», 1960, **25**, № 3, 257—262

Рассматривается дифференциальное уравнение

$$A[u(x)] - \lambda w(x)\,u(x) = f(x)$$

при однородных краевых условиях, где A — самосопряженный положительно определенный оператор, $w(x)$ — положительная непрерывная функция, $x = x(x_1, x_2, \ldots, x_m)$ — точка m-мерного пространства, λ — отрицательное число. Выводится формула оценки погрешности для n-го приближения решения $u_n(x)$, полученного с помощью метода Ритца;

$$\| u(x) - u_n(x) \| \leqslant \frac{C}{\omega_{n+1}},$$

где

$$C = \sqrt{\frac{w_{\max}}{w_{\min}}}\left(|\lambda|\sqrt{w_{\max}}\,C_0 + \| f(x) \|\right)\left(1 + \frac{|\lambda|}{\lambda_1 - \lambda}\right),$$

$$C_0 = \sqrt{w_{\max}}\,\| f(x) \| \left(\sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{\omega_i^2}\right)^{1/2}\left(1 + \frac{\|\lambda\|}{\lambda_1 - \lambda}\right),$$

ω_i — собственные значения, соответствующие собственным функциям $v_i\,(i = 1, 2, \ldots)$ дифференциального уравнения

$$Av = \omega v,$$

λ_1 — некоторая величина, зависящая от n, определяемая исходным уравнением. Формула оценки погрешности выводится также для случая, когда v_i равномерно ограничены, т. е. когда $|v_i(x)| \leqslant l\ (i = 1, 2, \ldots)$.

Ю. М. Барабошкин

10 В224. Программа для автоматического интегрирования дифференциальных уравнений с применением метода рядов Тейлора. Gibbons A. A program for the automatic integration of differential equations using the method of Taylor series. «Comput. J.», 1960, **3**, № 2, 108—111 (англ.)

Кратко описан принцип построения программы для решения систем обыкновенных дифференциальных уравнений на быстродействующих цифровых вычислительных машинах путем разложения решения в ряд Тейлора. Приводятся сведения о существующей программе такого рода, позволяющей решать системы, состоящие из 6 уравнений не выше 15 порядка. Ю. М. Барабошкин

10 В225. Численное определение точных орбит. Eckert W. J. Numerical determination of precise orbits. «Proc. Sympos. Appl. Math.», 1959, **9**, 145—151 (англ.)

Существуют два основных метода вычисления орбит — аналитический (метод «общих возмущений») и численный. Последний был трудно осуществим до появления быстродействующих цифровых машин. В 1949 г. была численно решена задача 6 тел (Солнце, Юпитер, Сатурн, Уран, Нептун и Плутон); малое воздействие группы малых планет на движение 5 внешних планет в эту задачу включено не было; оно может быть учтено аналитическими методами. Орбиты рассчитаны на 400-летний период (1653—2060), шаг интегрирования $h = 40$ дням; координаты брались с точностью 16 знаков. Было проделано несколько последовательных уточнений начальных значений с учетом данных 25 000 наблюдений. Перечисляются другие меры, принятые для контроля точности. Расчетные орбиты можно сопоставлять с истинными, например, для уточнения данных о массах планет. Указывается на применения численных методов и быстродействующих цифровых машин для проверки (на конечном интервале времени) аналитических формул возмущений, для уточнения орбит малых планет, для расчета по точным формулам, даже если они очень громоздки (формулы движения Луны). Отмечается малая пригодность численных методов для качественной теории: задача 6 тел может быть просчитана за год на НОРК на несколько миллионов лет вперед, но ценность этого мала ввиду зависимости от начальных параметров. М. Л. Бродский

10 В226. Интегрирование уравнений движения небесной механики на электронных вычислительных машинах по квадратурному методу Коуэлла с автоматическим выбором шага. Куликов Д. К. «Бюл. Ин-та теор. астрон. АН СССР», 1960, **7**, № 10, 770—797

Дается применение метода Коуэлла к машинным вычислениям для случая, когда шаг интегрирования является переменным. Выводятся необходимые формулы для интегрирования уравнений по квадратурному методу Коуэлла. Полученные формулы дают возможность сравнительно просто преобразовать таблицу интегрирования при увеличении или уменьшении шага интегрирования в 2 раза и установить соответствующие критерии для изменения шага интегрирования. Подробно рассматривается методика интегрирования уравнений движения небесной механики по квадратурному методу Коуэлла с переменным шагом с учетом разностей четвертого порядка в формулах интегрирования. Даются рабочие формулы для интегрирования с учетом шестых и восьмых разностей. Указывается, что разработанная методика интегрирования с автоматическим выбором шага была успешно применена к решению ряда больших задач на машине БЭСМ. И. Ф. Шелихова

10 В227. Метод линеаризации дифференциальных уравнений типа уравнений маятника. Rybarski A. Pewna metoda linearyzacji równań różniczkowych typu równania wahadła. «Zastosow. mat.», 1960, **5**, № 3, 247—259 (польск.; рез. русск., англ.)

Дается приближенный метод решения дифференциальных уравнений вида:

$$\ddot{y} + f(y) = 0,$$

основанный на замене этого уравнения уравнением

$$\ddot{y} + ay + b = 0,$$

где a и b — соответствующим образом подобранные постоянные коэффициенты. Выводится формула оценки погрешности, а также указываются значения коэффициентов, при которых погрешность является оптимальной. Рассматривается итерационный метод, основанный на решении уравнения вида

$$\ddot{y} + ay + h(t) = 0,$$

где постоянная a и функция $h(t)$ соответствующим образом подобраны. Исследованы условия сходимости процесса итерации и дана оценка погрешности решения.

Изложенное проиллюстрировано на примере решения уравнения маятника. И. Ф. Шелихова

10 В228. Оценка погрешности численного решения обыкновенного дифференциального уравнения первого порядка в комплексной области. Цхадая Ф. Г. «Гамотвлиты центрис шромеби. Мецниеребата Академиа Сакартвелос ССР, Тр. Вычисл. центра. АН ГрузССР», 1960, **1**, 231—243 (груз.; рез. русск.)

Рассматривается вопрос о численном интегрировании обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\frac{dw}{dz} = \varphi(z, w)$$

в прямоугольной комплексной области при начальных условиях $z=z_0$, $w=w_0$. Область интегрирования покрывается квадратной сеткой и решение ищется по следующим этапам: 1) нахождение решения в первых s узлах нулевой прямой с помощью разложения Тейлора; 2) нахождение решения в остальных узлах нулевой прямой с помощью формулы типа Адамса; 3) нахождение решения в других узлах прямоугольной области с помощью формулы численного интегрирования с комплексными коэффициентами. Дается оценка погрешности, откуда следует сходимость вычислительного процесса. М. А. Алексидзе

10 В229. Численное интегрирование системы обыкновенных дифференциальных уравнений первого порядка в комплексной области. Цхадая Ф. Г. «Гамотвлиты центрис шромеби. Мецниеребата Академиа Сакартвелос ССР, Тр. Вычисл. центра. АН ГрузССР», 1960, **1**, 245—262 (груз.; рез. русск.)

С помощью интерполяционной формулы Эрмита выводятся формулы с комплексными коэффициентами для систем дифференциальных уравнений в комплексной области. Рассматривается та же вычислительная процедура, которая применялась для численного решения одного дифференциального уравнения (реф. 10В228). Дается оценка погрешности, возникающая при отбрасывании остаточного члена. М. А. Алексидзе

10 В230. О сходимости процесса интегрирования дифференциальных уравнений с помощью формул суммирования. Джоджуа А. К. «Гамотвлиты центрис шромеби. Мецниеребата Академиа Сакартвелос ССР, Тр. Вычисл. центра. АН ГрузССР», 1960, **1**, 321—325

Для численного интегрирования в промежутке (x_0, X) дифференциального уравнения

$$y^{(n)} = f(x, y, y', y'', \ldots, y^{(n-2)})$$

с начальными условиями

$$y^{(k)}(x_0) = y_0^{(k)} \quad (k = 0, 1, 2, \ldots, n-1)$$

можно воспользоваться следующей формулой (метод суммирования):

$$y_m^{(k)} = \sum_{\lambda=0}^{n-k-1} \frac{(mh)^\lambda}{\lambda!}\, y_0^{(k+\lambda)} - \frac{1}{2}\frac{m^{n-k-1}h^{n-k}}{(n-k-1)!}\, y_0^{(n)} + \frac{h^{n-k}}{(n-k-1)!}\, M_{n-k-1,m} + R_{m,k}$$

$$(k = 0, 1, 2, \ldots, n-2;\ m = 1, 2, \ldots, \mu),$$

где

$$y_m^{(k)} = y^{(k)}(x_0 + mh), \quad h = \frac{X - x_0}{\mu},$$

$$M_{n-k-1,m} = \sum_{\nu=0}^{m-1} (m-\nu)^{n-k-1}\, y_\nu^{(n)},$$

$R_{m,k}$ — остаточный член. В работе доказывается сходимость метода суммирования при $h \to 0$ для любых порядковых значений m. Ю. М. Барабошкин

10 В231. Новый метод приближенного решения уравнения Лапласа. Vadovič Fridrich. Nová metóda približného riešenia Laplaceovej a Poissonovej rovnice. «Strojnícky časop.», 1960, **11**, № 1, 16—28 (словацк.; рез. русск., нем.)

Для приближенного нахождения решения $p(x, y)$ уравнения Лапласа и Пуассона в какой-нибудь внутренней точке O области рассматривается следующий прием: Через точку O проводятся n прямых и приближенное значение p в точке O находится по приведенным в статье формулам через значения правой части уравнения и по значениям функции p в точках пересечения границы области с проведенными через точку O прямыми. Не рассматривается вопрос об оценке погрешности, возникающей при применении описанного метода нахождения приближенного решения. В. И. Лебедев

10 В232. О численном решении задачи Дирихле для уравнения Лапласа. Бахвалов Н. С. «Вестн. Моск. ун-та. Сер. матем., механ., астрон., физ., химии», 1959, № 5, 171—195

Решаются следующие вопросы, связанные с численным решением задачи Дирихле для уравнения Лапласа: 1) Указать рост минимального числа действий, достаточного для определения решения с заданной точностью, при увеличении точности. 2) Указать метод, для которого порядок роста числа действий будет минимальным. Если G — область с границей Γ в m-мерном пространстве, $P_\alpha^h \in \overline{G}$ — система узлов, зависящих от параметра $h > 0$, а f_α^h — значения функции f в узлах P_α^h, и

$$L_\alpha^h(f) = \frac{-f_\alpha^h + \sum_\beta K_{\alpha\beta} f_\beta^h}{q_\alpha}, \quad \text{где } K_{\alpha\beta} \geqslant 0,$$

$\rho_\alpha^h = \rho(P_\alpha^h, \Gamma)$ и выполнены условия:

1) $L_\alpha^h\left(\sum_1^m x_k^2\right) \geqslant C_1 > 0$;

2) $|L_\alpha^h(f)| \leqslant C_2[\max(\rho_\alpha^h, h)]^\varkappa h^{1-\varkappa} \max_{\substack{G \\ \gamma_1 + \ldots + \gamma_m = 3}} |f^{\gamma}x_1^{\gamma_1}, \ldots, x_m^{\gamma_m}|$,

если в G $\Delta f = 0$, $\varkappa > 0$.

3) $\rho(P_\alpha^h, P_\beta^h) \leqslant C_3 \max(\rho_\alpha^h, h)$, если $K_{\alpha\beta} > 0$;

4) для любого $P_\alpha^h \in G$ найдется $P_{\alpha_0}^h \in \Gamma$ такой, что если $l_{\alpha_0}^h = 1$, в $\overline{G}$ $f_\alpha^h \geqslant 0$ и в G $L_\alpha^h(f) = 0$, то $f_{\overline{\alpha}}^h \geqslant \psi\left(\frac{h}{\rho_{\overline{\alpha}}^h}\right)$, при этом $\rho(P_{\alpha_0}^h, P_{\overline{\alpha}}^h) \leqslant C_4 \max(\rho_{\overline{\alpha}}^h, h)$ (Постоянные C_1, C_2, C_3, C_4, $\varkappa$ и $\psi(\xi)$ не зависят от h и α), и если любой точки границы Γ можно извне коснуться прямым круговым конусом с высотой H и углом при вершине β, то доказывается лемма: Если $w_\alpha^{\rho,h}$ — решение системы $w_\alpha^{\rho,h}|_\Gamma = 0$,

$$L_\alpha^h(w^\rho) = \begin{cases} -1 & \text{при } \rho_\alpha \leqslant \rho, \\ 0 & \text{при } \rho_\alpha > \rho, \end{cases}$$

то $0 \leqslant w_\alpha^{\rho,h} \leqslant M(H, \beta, C_1, C_2, C_3, C_4\psi(\xi), \varkappa, R)(\rho^2 + h^2)$, где R — радиус сферы, содержащей внутри себя область G. На основании этой леммы выводится оценка ошибки, $R_\alpha^h = u - u^h$ численного решения

$$L_\alpha^h(u^h) = 0, \quad u^h|_\Gamma = \varphi$$

при условии, что операторы L_α^h удовлетворяют дополнительным условиям:

1) В узлах второго типа

$$|L_\alpha^h(u)| \leqslant \frac{Q_1(P,\lambda)}{q_\alpha} Ah^{\min(p+\lambda,s)}.$$

2) В узлах первого типа при $\rho_\alpha \leqslant \nu h$ (ν — некоторая постоянная)

$$|L_\alpha^h(u)| \leqslant Q_2(p,\lambda) Ah^{\min(p+\lambda,s)-2}.$$

3) В остальных узлах

$$|L_\alpha^h(u)| \leqslant Q_3(p,\lambda) Ah^{\min(p+\lambda,s)-2}\left(\frac{h}{\rho_\alpha^h}\right)^\theta$$

(Узел P_β^h — соседний к узлу P_α^h, если $K_{\alpha\beta}>0$, узел P_α^h — узел 2-го типа, если среди соседних к нему узлов есть граничные, остальные узлы — узлы 1-го типа), тогда

$$|R_\alpha^h| \leqslant Q_4(m,p,\lambda) Ah^{\min(p+\lambda,s)-\max(0,2-\theta)} |\log h|^{\delta_{\theta,2}},$$

$\delta_{i,j}$ — символ Кронекера. В случае равномерной сетки при $m=2$, $u\in H(p,A,\lambda)$ и $\Delta u=0$

$$R_\alpha^h = O(Ah^{\min(p+\lambda,2)}|\log h|^{\delta_{p+\lambda,2}}),$$

при $m=2$, $p+\lambda<2$, $\lambda<1$ эту оценку нельзя улучшить по порядку: если вдали от границы уравнение Лапласа аппроксимируется с точностью $O(h^s)$ вблизи от границы с точностью $O(h^{s-2})$, то

$$R_\alpha^h = O(h^{\min(s,p+\lambda)}|\log h|^{\delta_{s,p+\lambda}}).$$

Так как при удалении от границы области улучшаются дифференциальные свойства гармонических функций, то в работе применяются при удалении от границы квадратурные формулы более высоких порядков точности и более крупный шаг сетки. Укрупнение сетки строится по некоторому параметру σ, $0<\sigma<1$, с использованием формул 6-го порядка точности; в этом случае получена следующая оценка погрешности

$$R_\alpha^h = O(h^{\min(3,p+\lambda)-\max(0,6\sigma+p+\lambda-6)}|\log h|^{\delta_{\sigma(1-\sigma),p+\lambda}}).$$

Показывается, что, производя $\asymp h^{2\sigma-2}|\log h|$ итераций, можно определить решение системы конечноразностных уравнений с точностью $\asymp h^{p+\lambda}$. Если $\Gamma\in\Lambda_{k+1}(B,\lambda)$, $\varphi\in H(p,A,\lambda)$, где $p+\lambda\leqslant k+1+\lambda$, $\lambda<1$, $p\leqslant 2$ и $\frac{1}{2}<\sigma<1-\frac{p+\lambda}{6}$, то для определения значений точного решения предлагаемым способом с точностью $\varepsilon\asymp h^{p+\lambda}$ необходимо использовать значения граничной функции φ в $\asymp\frac{1}{h}\asymp H_\varepsilon$ точках, память машины в $\asymp\frac{1}{h}\asymp H_\varepsilon$ чисел и произвести дополнительно $\asymp h^{2\sigma-3}\log h\asymp H^{3-2\sigma}\log\varepsilon$ арифметических действий; аналогичные оценки даются для формул n-го порядка точности. Приводятся формулы для $m=2$, $n=10$. При помощи разностного аналога формулы Грина строятся системы конечноразностных уравнений и показывается, что для определения решения ее с точностью $\varepsilon\asymp h^{p+\lambda}$ достаточно произвести $\asymp\log^2 h$ итераций и что при $\varphi\in H(p,A,\lambda)$, $\Gamma\in\Lambda_{k+1}(B,\lambda)$, $k+1\geqslant p$, $\lambda<1$, $p\leqslant 2$, для определения значений точного решения с точностью ε достаточно произвести $\asymp H_\varepsilon\log^2\varepsilon$ арифметических действий, используя память в $\asymp H_\varepsilon$ чисел. Разобран случай, когда граница области обладает лучшими дифференциальными свойствами по сравнению с граничной функцией и показывается, что в этом случае можно уменьшить число действий, достаточное для определения значений точного решения в какой-либо внутренней точке, до $\asymp H_\varepsilon$; в предлагаемом способе производится усреднение граничной функции.

В. И. Лебедев

10 В233. К решению методом сеток уравнений эллиптического типа с краевыми условиями, содержащими производные. Александзе М. А. «Гамотвлиты центрис шромеби. Мецниеребата Академиа Сакартвелос ССР, Тр. Вычисл. центра. АН ГрузССР», 1960, I, 201—210

Е. А. Волков (РЖМат, 1956, 4090) получил сеточные уравнения, аппроксимирующие краевые условия с косой и нормальной производной (для эллиптических уравнений второго порядка), с погрешностью порядка h^2. При этом Е. А. Волков предполагал, что коэффициент при нормальной производной в краевом условии не обращается в нуль (в противном случае соответствующие сеточные уравнения имеют погрешность порядка h). Автор выводит сеточные уравнения в граничных узлах, имеющие погрешность порядка h^2, для той же краевой задачи, но без указанного выше ограничения на коэффициенты при производных в краевом условии. При этом отдельно рассматриваются три случая: у граничной точки не хватает одной, двух и трех соседних регулярных точек. Обращается внимание на удобство применения этих формул при составлении универсальных программ (вся информация для вычисления коэффициентов сеточных уравнений в приграничных узлах извлекается из ближайшей точки на границе, которая легко находится при полной автоматизации).

В. К. Саульев

10 В234. Вывод конечноразностных уравнений для кристаллической решетки. Gilard Jacques. Recherche d'équations aux différences finies pour des points situés sur une distribution superficielle de charges. Cas des systèmes de révolution. «C. r. Acad. sci.», 1960, **251**, № 25, 2906—2908 (франц.)

Дан краткий вывод двух сеточных уравнений, аппроксимирующих уравнение

$$\partial^2u/\partial z^2+\partial^2u/\partial r^2+(k/r)\,\partial u/\partial r=0$$

с условиями сшивки вида

$$[\partial u/\partial r]_+-[\partial u/\partial r]_-=g,\ [\partial u/\partial n]_+=[\partial u/\partial n]_-.$$

Одно сеточное уравнение соответствует случаю, когда линия разрыва параллельна оси Or, другое — оси Oz.

10 В235. Обратные краевые задачи и практические методы их решения. Тумашев Г. Г. «Изв. высш. учебн. заведений. Энергетика», 1961, № 2, 103—108

Излагаются приближенные методы решения двух простейших обратных краевых задач математической физики. Задача построения профиля крыла по хордовой диаграмме решается методом, который состоит в нахождении функции, отображающей конформно внешность круга во вспомогательной плоскости на внешность искомого профиля. Для решения плоской задачи построения основания гидротехнического сооружения по заданному гашению напора вдоль ширины флютбета использован метод, являющийся видоизменением метода Н. Б. Ильинского.

И. Ф. Шелихова

10 В236. Приближенное решение нестационарных задач теплопроводности. Бухарин В. И., Даниловская В. И. «Инженерный сб.», 1960, **30**, 112—118

Изучается нестационарное температурное поле в тонкой цилиндрической стенке и в плоской двухслойной стенке при неравномерном нагреве. Граничные условия на стенках и на границе контакта — обычные, коэффициенты теплоотдачи считаются функциями времени. Решение обоих задач ищется в форме квадратных трехчленов, коэффициенты которых являются функциями времени. Полученные решения приближенно удовлетво-

ряют уравнению теплопроводности (оценка отклонения от точного решения не дается), точно удовлетворяют граничным условиям и в интегральной форме начальным условиям. Х. М. Коган

10 В237. Решение задач теплопроводности методом сеток. Мучник Г. Ф. «Инж.-физ. ж.», 1961, **4**, № 3, 72—82 (рез. англ.)

Для решения уравнения теплопроводности с краевым условием третьего рода применяется метод сеток. Температура в любой точке выражается через ее значения на границах и коэффициенты связи — «веса», учитывающие взаимосвязь между произвольной точкой области и граничными точками. Значения «весов» не зависят от краевых условий. Для определения «весов» используется метод конечных разностей. Даются аналитические соотношения, позволяющие в ряде случаев перейти в методе конечных разностей от целочисленных значений времени к промежуточным. Приводятся замечания относительно построения счетного устройства для решения рассмотренных задач. И. Ф. Шелихова

10 В238. Метод прямых для уравнения параболического типа. Маруашвили Т. И. «Гамотвлиты центрис шромеби. Мецниереба Академиа Сакартвелос ССР, Тр. Вычисл. центра. АН ГрузССР», 1960, **1**, 215—230 (груз.; рез. русск.)

Рассматривается вопрос о приближенном решении уравнения

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial u}{\partial t} - f(x) \qquad (1)$$

при следующих граничных условиях:

$$\left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_{x=0} = \varphi_2(t), \quad \left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_{x=l} = \varphi_2(t) \qquad (2)$$

и начальном условии

$$u(x, 0) = \psi(x). \qquad (3)$$

Исследуются два варианта метода прямых: а) замена второй производной по x через разностные отношения; б) замена производной по времени через разностное отношение. В первом случае применяется простейшая аппроксимация u''_{xx} и вопрос сводится к решению системы из n дифференциальных уравнений первого порядка. Дается оценка погрешности приближенного решения и устанавливается устойчивость вычислительной схемы (приближенное решение непрерывно зависит от правой части уравнения (1) и от граничных (2) и начальных (3) условий). Во втором случае первая производная по времени заменяется первым разностным отношением, после чего получается последовательность обыкновенных дифференциальных уравнений второго порядка. Доказывается сходимость решения полученной последовательности дифференциальных уравнений к решению задачи (1) — (3) и устойчивость вычислительного процесса. М. А. Алексидзе

10 В239. Некоторое применение метода хорд и метода касательных. Драхлин Е. Х. «Сб. научн. тр. Пермск. политехн. ин-т», 1960, № 7, вып. 1, 57—66

На примере конкретной задачи рассматривается применение метода хорд к решению систем уравнений тепловой конвекции. Обсуждаются также вопросы применения в аналогичных случаях метода касательных. Библ. 8 назв. Ю. М. Барабошкин

10 В240. Применение метода возмущений для исследования влияния модуля поперечного растяжения на напряженное состояние тонкой пластинки. Hanuška A. Die Anwendung der Methode der Störungsrechnung für die Untersuchung des Einflusses der Querdehnungszahl auf den Spannungszustand dünner Platten. «Z. angew. Math. und Mech.», 1960, **40**, № 12, 570—571 (нем.)

Рассматривается бигармоническое уравнение для определения прогиба тонкой пластинки

$$\Delta\Delta w = \frac{p(x, y)}{N}, \qquad (1)$$

где жесткость $N = \frac{1}{12} \cdot \frac{Eh^2}{1-\mu^2}$ (μ — модуль поперечного растяжения) при контурных условиях вида

$$R_1(x, y, w, w_x, w_y, w_{xx}, w_{xy}, w_{yy}, w_{xxx}, w_{xxy}, w_{xyy}, w_{yyy}, \mu) = 0, \qquad (2)$$

$$R_2(x, y, w, w_x, w_y, w_{xx}, w_{xy}, w_{yy}, w_{xxx}, w_{xxy}, w_{xyy}, w_{yyy}, \mu) = 0. \qquad (3)$$

Предполагается, что известно решение задачи (1), (2), (3) для некоторого μ_0, и требуется найти решение в случае пластинки из другого материала с модулем поперечного растяжения $\mu = \mu_0 + \varepsilon$, $|\varepsilon| \leqslant \frac{1}{2}$. Применяется известный метод возмущения (метод малого параметра). Решение задачи ищется в виде бесконечного ряда

$$w(x, y, \mu) = \sum_{n=0}^{\infty} (\mu - \mu_0)^n w_n(x, y, \mu_0), \qquad (4)$$

который подставляется в (1), (2), (3), и коэффициенты при одинаковых степенях ε сравниваются; в результате получаются рекуррентные соотношения для w_n. Решен пример для параллелограммовидной пластинки.

Д. Б. Тополянский

10 В241. О применении метода Л. В. Канторовича к решению задач нестационарной тепловой конвекции в замкнутых полостях. Пустовойт С. П. «Сб. научн. тр. Пермск. политехн. ин-т», 1960, № 7, вып. 1, 77—86

Решается плоская задача для системы уравнений нестационарной тепловой конвекции

$$\frac{\partial \Delta\psi}{\partial t} - \Delta\Delta\psi = Grot(\theta\gamma) + \frac{\partial\psi}{\partial x} \cdot \frac{\partial \Delta\psi}{\partial y} - \frac{\partial\psi}{\partial y} \cdot \frac{\partial \Delta\psi}{\partial x},$$

$$\frac{\partial\theta}{\partial t} + (v\nabla)\theta = \frac{1}{P}\Delta\theta \qquad (1)$$

при начальных и граничных условиях:

$$\left.\frac{\partial\psi}{\partial x}\right|_{t=0} = \left.\frac{\partial\psi}{\partial y}\right|_{t=0} = 0, \quad \left.\frac{\partial\psi}{\partial x}\right|_{\Gamma} = \left.\frac{\partial\psi}{\partial y}\right|_{\Gamma} = 0,$$

$$\theta\Big|_{t=0} = \theta_0, \quad \theta\Big|_{\Gamma} = f_1(t, S)$$

(или $\left.\frac{\partial\theta}{\partial n}\right|_{\Gamma} = f_2(t, S)$), где ψ — функция тока, v — гидродинамическая скорость, $v_x = \frac{\partial\psi}{\partial y}$, $v_y = \frac{\partial\psi}{\partial x}$, θ — температура, Γ — граница полости, γ — единичный вектор, направленный против ускорения силы тяжести, G — число Грассгофа, P — число Прандтля, f_1 и f_2 — известные функции. Предполагая число Грассгофа достаточно малым (в случае слабой конвекции), автор ищет решение задачи в виде разложения величин ψ и θ по степеням G. В результате подстановки этих разложений в уравнения (1) получаются линейные уравнения для последовательных приближений. Автор выписывает уравнения и условия (начальные и граничные), получаемые в нулевом и первом приближениях, причем считает решение уравнения нулевого приближения известным, а для решения уравнений первых приближений с соответствующими условиями применяет метод Л. В. Канторовича (Канторович Л. В.,

Крылов В. И., Приближенные методы высшего анализа. М. — Л, ГИТТЛ, 1949). Оценка погрешности отсутствует.
Д. Б. Тополянский

10 В242. Численный расчет собственных функций дифференциального уравнения в частных производных, коэффициенты которого суть функции интеграла собственной функции. Motinori Goto. Numerical calculation of an eigenfunction of a partial differential equation whose coefficients are functions of the integral of the eigenfunction. «Sympos. Numeric. Treatment Partial Different. Equations with Real Characteristics. Rome, 1959». Rome, s. a., 117—130 (англ.)

На электронной машине при определенных граничных условиях численно решается критическое уравнение реактора

$$-\nabla^2\Phi + \frac{1}{M^2}\Phi = \nu\Lambda\Phi, \qquad (1)$$

коэффициенты которого M^{-2}, Λ при выгорании ядерного горючего являются функциями точек активной зоны реактора. Уравнение (1) сводилось к системе алгебраических уравнений вида

$$B\Phi = \nu\Phi,$$

и, следовательно, исходная задача — к задаче на собственные значения матрицы B_1, порядок которой равен числу точек сетки. Матрица B затем преобразовывалась так, чтобы все собственные значения, кроме минимального, находились в интервале $(-1,1)$. Минимальное собственное значение последней матрицы и принадлежащий ему собственный вектор находились при помощи последовательного вычисления итераций произвольного вектора.
Н. Я. Ляшенко

10 В243. Численное решение двумерных вариационных задач газовой динамики. Gispert Hans-Günter. Numerische Behandlung eines 2-dimensionalen Variationsproblems aus der Gasdynamik. «Wiss. Z. Martin—Luther—Univ. Halle—Wittenberg. Math.-Nat. Reihe», 1956—1957, 6, 209—221. «Math. Revs», 1958, **19**, № 7, 798—799 (англ.)

10 В244. Некоторые теоремы о сходимости метода Ньютона. Вертгейм Б. А. «Сб. научн. тр. Пермск. политехн. ин-т», 1960, № 7, вып. I, 3—28

По методике, развитой Л. В. Канторовичем, изучаются условия сходимости метода Ньютона для функциональных уравнений вида $P(x) = 0$, где $y = P(x)$ — нелинейная операция, x и y — элементы некоторых пространств типа Банаха — X и Y. Рассматриваются классы уравнений, характеризуемых одним из следующих предположений относительно операции P: 1) существует производная Фреше $P'(x)$, удовлетворяющая условию Гельдера $\| P'(x_1) - P'(x_2) \| \leqslant K \| x_1 - x_2 \|^{\alpha}$, где $\alpha(0<\alpha\leqslant 1)$ и K — некоторые постоянные; 2) $P'(x)$ непрерывна в окрестности начального приближения. Результаты, относящиеся к этому вопросу, опубликованы в других работах автора (РЖМат, 1958, 3304; 1959, 6022). Метод Ньютона применяется к системе дифференциальных уравнений, описывающей плоское стационарное конвективное движение однородной жидкости, заполняющей цилиндрическую область:

$$\Delta\Delta\psi = -\frac{\partial T}{\partial x} + Q\left(\frac{\partial\psi}{\partial x}\cdot\frac{\partial\Delta\psi}{\partial y} - \frac{\partial\psi}{\partial y}\cdot\frac{\partial\Delta\psi}{\partial x}\right),$$

$$\Delta T = \frac{\partial\psi}{\partial x}\cdot\frac{\partial T}{\partial y} - \frac{\partial\psi}{\partial y}\cdot\frac{\partial T}{\partial x}$$

с граничными условиями на контуре Γ плоской области D (поперечного сечения цилиндра):

$$T\Big|_{\Gamma} = hf(s),\ \psi\Big|_{\Gamma} = \frac{\partial\psi}{\partial n}\Big|_{\Gamma} = 0,$$

где T — температура, ψ — функция тока, s — координата точки контура, Q и h — постоянные. Уточняются известные результаты (Линейкин П. С., Об уравнениях тепловой конвекции. Прикл. матем. и механ. 1951, **15**, 4) о сходимости метода последовательных приближений для уравнений тепловой конвекции.
Д. Б. Тополянский

10 В245. Решение методом релаксации систем линейных алгебраических уравнений. Freitas A. César de. Método de relaxação para a resolução de sistemas de equações algébricas lineares. «Gaz. mat.», 1960, **21**, № 79-80, 1—5 (порт.)

Речь идет о приближенном решении систем линейных алгебраических уравнений с квадратной матрицей методами последовательных приближений типа метода релаксации Саусвела.

10 В246. Об операции уменьшения ранга и ее применении к решению линейных систем. Egerváry Eugen. On rank—diminishing operations and their applications to the solution of linear equations. «Z. angew. Math. und Phys.», 1960, **11**, № 5, 376—386 (англ.; рез. нем.)

Автор вводит понятие «операция уменьшения ранга», показывая, что ранг матрицы

$$A - \frac{Auv^*A}{v^*Au},$$

(где u и v — произвольные векторы — столбцы такие, что $v^*Au \neq 0$) на единицу меньше ранга A. Этот факт используется при выводе формул

$$A = \sum_{k=0}^{r-1} \frac{A_k u_{k+1} v_{k+1}^* A_k}{v_{k+1}^* A_k u_{k+1}}, \qquad (1)$$

$$A_{k+1} = A_k - \frac{A_k u_{k+1} v_{k+1}^* A_k}{v_{k+1}^* A_k u_{k+1}}. \qquad (2)$$

В зависимости от выбора векторов u_i и v_i^* формулы (1) и (2) могут быть применены к решению различных задач. Если $u_i = [0, 0, \ldots, 1, 0 \ldots 0]'$ — n-мерный вектор, $v_i^* = [0, \ldots, 1 \ldots 0]$ — m-мерный вектор, то, применяя r раз (2) ($i = 1, 2, \ldots, r$), можно получить разложение прямоугольной матрицы $n \times m$ ранга r в произведение 2-х треугольных. Если u_i и v_i^* — системы A-ортогональных векторов, то, применяя (1), можно получить «обобщенную» обратную матрицу для прямоугольной матрицы, в частности формулу Штифеля — Хестенеса для обращения неособенной матрицы. Формулы (1) и (2) позволяют выразить обратную матрицу для главного минора $(n-1)$-го порядка A через A^{-1}, удобную при решении краевых задач разностным методом с модифицированными краевыми условиями. Автор показывает, как с помощью операции понижения ранга можно решать однородные системы диофантовых уравнений, находить максимальное число линейно независимых решений однородной линейной системы. Как частный случай получает метод Перселла для решения неоднородной системы.
В. Н. Кублановская

10 В247. О точности решения плохо обусловленных систем линейных алгебраических уравнений. Зайцева Н., Ларченко Н. «Тр. Моск. ин-та инж. землеустройства», 1960, вып. 10, 173—186

Приводятся исследования о повышении точности решения плохо обусловленных систем линейных алгебраических уравнений. Рассматриваются как системы нормальных уравнений, так и системы линейных алгебраических уравнений с несимметричными коэффициентами. Показано решение и последующее уточнение двух ха-

рактерных плохо обусловленных систем линейных алгебраических уравнений. При этом система с симметричными коэффициентами решалась при различных перестановках коэффициентов с удержанием различного числа десятичных знаков. Для определения точности решения использован метод нахождения поправок к найденным корням системы. Показано, что если не учитывать влияния ошибок нахождения коэффициентов исходной системы, точность решения плохо обусловленных систем линейных алгебраических уравнений различна при различном расположении уравнений в исходной системе и следует брать дополнительное количество знаков, равное количеству значащих цифр, уничтожающихся в наименьшем по модулю ведущем коэффициенте. Рассмотрен вопрос о влиянии на точность нахождения неизвестных количества значащих цифр, с которым ведутся вычисления. И. Ф. Шелихова

10 В248. Приближенное решение матричных задач. Householder A. S. The approximate solution of matrix problems. «J. Assoc. Comput. Machinery», 1958, 5, № 3, 205—243 (англ.)

Приводятся оценки для некоторых норм матрицы A^{-1}, где

$$A=\begin{bmatrix} P & 0 & 0 & \dots \\ -Q & P & 0 & \dots \\ 0 & -Q & P & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \end{bmatrix}$$

Здесь $P=P(k)$, $Q=Q(k)$, $k=J+J'$,

$$J=\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & \dots \\ 1 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & 1 & 0 & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \end{bmatrix},$$

$P(x)$ и $Q(x)$ — полиномы. Рассматриваются некоторые схемы решения уравнений математической физики, приводящие к конкретным случаям полиномов $P(x)$ и $Q(x)$. В. Н. Фаддеева

10 В249. Метод последовательных проекций для решения линейных алгебраических векторных уравнений и его применения для обращения матриц. Lehti Raimo. Eine Methode von sukzessiven Projektionen zur Lösung der linearen algebraischen Vektorgleichung und ihre Anwendungen fur Inversion von Matrizen. «Comment. physmath. Soc. Scient. fennica», 1958, 21, № 5, 35 S., ill (нем.)

10 В250. Скалярные итерации и линейные уравнения. Kellogg R. Bruce, Noderer L. C. Scaled iterations and linear equations. «J. Soc. Industr. and Appl. Math.», 1960, 8, № 4, 654—661 (англ.)

Решение x матричного уравнения $x=Ax+b$ удовлетворяет условию $L(I-A)x=Lb$, где L — линейный функционал. Требуя, чтобы приближенное решение x_n итерационной схемы $x_{n+1}=Ax_n+b$ удовлетворяло этому условию, авторы получают новую итерационную схему

$$x_{n+1}=\frac{Lb}{L(I-A)(Ax_n+b)}(Ax_n+b), \qquad (1)$$

которую они назвали скалярной итерацией. Формула (1) геометрически означает, что каждая итерация находится в гиперплоскости $\{z: L(I-A)z=Lb\}$. Авторы исследуют итерационный метод (1) наиболее подробно для случаев, когда матрица A является итерационной матрицей метода Гаусса-Зейделя и итерационной матрицей метода последовательной верхней релаксации. Доказана следующая основная теорема: Пусть $Lx\neq 0$. Тогда (1) сходится к x для любого x_0 с $Lx_0\neq 0$, если и только если $(PA)^n z$ сходится к 0 для любого z (здесь P — оператор проектирования, определяемый по формуле $Pz=z-(Lz/Lb)b$). Рассматривается непрерывный аналог метода (1) на случай, когда A — оператор в банаховом пространстве. В. К. Саульев

10 В251. Обобщение некоторых результатов, относящихся к обращению клеточных матриц. Greenberg B. G., Sarhan A. E. Generalization of some results for inversion of partitioned matrices. «Contribs Probability and Statist». Stanford, Calif., Univ. Press, 1960, 216—223 (англ.)

Рассматриваются клеточные матрицы, в которых клетки имеют вид aI, bJ или $aI+bJ$. Здесь $I(I_n)$ обозначает единичную матрицу (порядка n), J — типичное обозначение матрицы (вообще говоря, прямоугольной), все элементы которой равны единице. Для некоторых типов таких матриц удается указать структуру обратной матрицы, имеющей такой же вид. Остается определить лишь некоторые числовые коэффициенты, для чего служат уравнения, находимые из равенства $C^{-1}C=I$. Например, если

$$C_1=\begin{bmatrix} k_1 I_n & aJ \\ aJ & k_2 I_p \end{bmatrix},\quad C_2=\begin{bmatrix} a & b & \dots & b \\ b & & & \\ \vdots & & kI+cJ & \\ b & & & \end{bmatrix},$$

то

$$C_1^{-1}=\begin{bmatrix} \frac{1}{k_1}I_n+\alpha J & \beta J \\ \beta J & \frac{1}{k_2}I_p+\gamma J \end{bmatrix},$$

$$C_2^{-1}=\begin{bmatrix} \alpha & \beta & \dots & \beta \\ \beta & & & \\ \vdots & & \frac{1}{k}I+\gamma J & \\ \beta & & & \end{bmatrix}.$$

М. К. Гавурин

10 В252. Новый прямой метод обращения матрицы. Shipley R. Bruce, Coleman Dorothy. A new direct matrix inversion method. «Commun. and Electron.», 1959, № 45, 568—570. Discuss., 570—572 (англ.)

Предлагается новый метод обращения матриц, изложенный на примере обращения квадратной матрицы 4-го порядка

$$Y=\begin{pmatrix} y_{11} & y_{12} & y_{13} & y_{14} \\ y_{21} & y_{22} & y_{23} & y_{24} \\ y_{31} & y_{32} & y_{33} & y_{34} \\ y_{41} & y_{42} & y_{43} & y_{44} \end{pmatrix}.$$

Элементы матрицы Y^{-1}, обратной для матрицы Y, находятся по следующим правилам:

1. Произвольный элемент главной диагонали, например y_{33}, замещается элементом $-\frac{1}{y_{33}}$, элементы, стоящие в том же столбце и той же строке, что и y_{33}, умножаются на $-\frac{1}{y_{33}}$.

2. Остальные элементы преобразуются следующим образом:

элемент y_{11} переходит в элемент $y_{11}-\frac{y_{13}\cdot y_{31}}{y_{33}}$,

элемент y_{14} переходит в элемент $y_{14}-\frac{y_{13}\cdot y_{34}}{y_{33}}$,

элемент y_{42} переходит в элемент $y_{42}-\frac{y_{32}\cdot y_{43}}{y_{33}}$,

элемент y_{44} переходит в элемент $y_{44}-\frac{y_{34}\cdot y_{43}}{y_{33}}$

и т. д.

3. Правила 1, 2 повторяются для каждого из элементов главной диагонали.

В результате получается матрица, элементы которой равны элементам соответствующей обратной матрицы с противоположными знаками. Для применения метода требуется, чтобы не все элементы главной диагонали равнялись нулю. Разбираются вопросы применения метода при вычислениях на цифровых вычислительных машинах. Приводятся данные, характеризующие скорость таких вычислений. Например, на машине ИБМ-704 комплексная матрица 100×100 без нулевых элементов обращается за 24 мин. Кратко рассмотрены возможности применения метода, когда все элементы главной диагонали равны нулю. Обсуждаются достоинства метода и вопросы его применения. Ю. М. Барабошкин

10 В253. Оценка кратчайшего расстояния квадратной матрицы до особых матриц. Применение к обращению матриц. Случай евклидова расстояния. Rigal Jean-Louis. Evaluation de la pluc courte distance d'une matrice carrée au lieu des matrices singulières Application à l'inversion d'une matrice. Cas de la distance euclidienne. «C. r. Acad. sci.», 1961, **252**, № 4, 506—508 (франц.)

Пусть $A=\{a_{ij}\}$ — квадратная матрица с нормой $\|A\|^2=\sum\sum a_{ij}^2$ и L_ε — совокупность некоторых квадратных матриц a, удаленных от A в смысле евклидовой метрики меньше, чем на ε. Показывается, что если a «соседняя» с A особая матрица, то расстояние между ними $\delta\sim\frac{1}{\|A^{-1}\|}$. Устанавливается, что условие $\varepsilon\|A^{-1}\|<1$ является необходимым и достаточным для того, чтобы любая матрица $a\in L_\varepsilon$ была бы неособая.

Л. А. Янович

10 В254. Метод для диагонализации нормальных матриц. Goldstine H. H., Horwitz L. P. A procedure for the diagonalization of normal matrices. «J. Assoc. Comput. Machinery», 1959, **6**, № 2, 176—195 (англ.)

Используя представимость нормальной матрицы A в виде

$$A=B+C, \qquad (1)$$

где B — эрмитова, C — кососимметрическая матрица, коммутирующая с B, авторы обобщают метод Якоби диагонализации эрмитовых матриц на случай нормальных матриц. Рассматриваются два процесса приведения нормальной матрицы A к диагональному виду. В первом процессе построение унитарной матрицы U осуществляется путем применения метода Якоби к эрмитовой матрице B. При этом U^*AU будет диагональной, если собственные числа B различны. Во втором процессе построение унитарных матриц на каждом шагу процесса осуществляется из условия минимума суммы квадратов модулей недиагональных элементов преобразуемой матрицы $A_{k+1}=U^*_kA_kU_k$. Выводятся расчетные формулы и доказывается сходимость процесса. В. Н. Кублановская

10 В255. О приближенном решении бесконечных систем линейных уравнений. Béla Jankó. Despre rezolvarea aproximativă a sistemelor de ecuații liniare infinite. «Studii şi cercetări mat. Acad. RPR Fil. Cluj», 1959, **10**, № 2, 317—327 (рум.; рез. русск., франц.)

Рассматриваются новые методы численного решения бесконечных систем линейных уравнений, являющиеся обобщением некоторых известных методов итераций. Бесконечная система линейных уравнений

$$\sum_{j=1}^{\infty}a_{ij}x_j=b_j\quad(i=1,2,\ldots)$$

преобразуется в эквивалентную нелинейную систему, подобранную таким образом, чтобы при применении обобщенного метода Ньютона (обобщения Канторовича) соответствующая матрица была матрицей простой формы, например диагональной, треугольной и т. д. Проводится исследование погрешности решения. И. Ф. Шелихова

10 В256. Приближенное решение бесконечных систем алгебраических уравнений методом Ю. Д. Соколова. Лучка А. Ю. Наближене розв'язання безконечних систем алгебраїчних рівнянь методом Ю. Д. Соколова. «Доповіді АН УРСР», 1961, № 2, 146—149 (укр.; рез. русск., англ.)

Метод усреднения функциональных поправок Ю. Д. Соколова применяется к бесконечным системам линейных алгебраических уравнений. Строятся приближенные решения, указываются достаточные условия сходимости и оценки погрешности. Метод имеет более широкую применимость, чем процесс простой итерации: приведен пример, для которого предложенный процесс сходится, как геометрическая прогрессия, в то время как процесс простой итерации расходится. Х. М. Коган

10 В257. Решение на модели методом градиента алгебраических и трансцендентных уравнений. Рыбашов М. В. «Автоматика и телемеханика», 1961, **22**, № 1, 77—88 (рез. англ.)

Излагается метод решения систем конечных уравнений на электронных моделях. По исходной системе конечных уравнений строится вспомогательная система дифференциальных уравнений, отличающаяся тем свойством, что ее устойчивые точки покоя соответствуют корням исходной системы. В работе исследуются особенности этого метода и находятся условия, при которых метод наиболее эффективен. Резюме автора

10 В258. О приближенном решении систем нелинейных уравнений методом хорд по узлам Чебышева. Дерендяев И. М. «Сб. научн. тр. Пермск. политехн. ин-т», 1960, № 7, вып. I, 33—39

Метод хорд, построенных по узлам Чебышева (РЖМат, 1959, 2022, 8553), применяется для решения систем нелинейных алгебраических и трансцендентных уравнений. Дана оценка скорости сходимости. Рассмотрен пример. Д. Б. Тополянский

10 В259. Сравнение градиентных методов с применениями. Chao F. h. Comparison of gradient methods with applications. «Чжунго кэсюэ, Scientia sinica», 1958, **7**, № 6, 565—581 (англ.)

10 В260. Об одном обобщении метода Ньютона. Квистик Л. ENSV Teaduste Akad. toimetised. Füüs.-matem. ja tehn. teaduste seer. «Изв. АН ЭстССР. Сер. физ.-матем. и техн. н.», 1960, **9**, № 4, 301—312 (рез. эст., англ.)

Рассматривается уравнение $P(x)=0$, где $P(x)$ преобразует банахово пространство X в пространство Y того же типа. Исследуется итеративный процесс

$$x_{n+1}=x_n-\alpha_nP'(x_n)^{-1}P(x_n)\ (0<\alpha_n<2), \qquad (1)$$

обобщающий процесс Ньютона, а также еще более общий процесс

$$x_{n+1}=x_n-A_nP'(x_n)^{-1}P(x_n), \qquad (2)$$

где A_n — некоторые операторы, такие, что

$$\|A_n-E\|\leqslant e<1.$$

При некоторых предположениях процессы (1) и (2) сходятся со скоростью геометрической прогрессии к корню $P(x)$. При условии, что α_n достаточно быстро стремятся к 1, сходимость процесса (1) является квадратичной. Аналогичное утверждение относится к процессу (2). В частности, для процесса Ньютона ($\alpha_n=1$) приводится в явной форме оценка сходимости, лучшая, чем общеупотребительная (известна точная оценка, получаемая осуществлением процесса Ньютона для простого мажорантного уравнения и, следовательно, не имеющая явной формы). М. К. Гавурин

10 В261. Необходимые и достаточные условия сходимости одномерных итеративных процессов. Шар-

ковский А. Н. «Укр. матем. ж.», 1960, 12, № 4, 484—489

Пусть $f(x)$ — непрерывная вещественная функция вещественной переменной. Рассматривается итеративный процесс $x_k = f(x_{k-1}) = f_k(x_0)$. Неподвижная точка α функции $f(x)$ называется притягивающей, если существует такое x_0, что $f_k(x_0) \to \alpha$. Односвязное множество точек $x_0 \neq \alpha$ с таким свойством называется областью притяжения к точке α.

Теорема 1. Пусть $f(x)$ имеет притягивающую неподвижную точку α. Для того чтобы некоторое односвязное множество, содержащее точку α, было областью притяжения α, необходимо и достаточно, чтобы оно не содержало нулей $x - f_2(x)$ и $f(x) - f_2(x)$ таких, что $f(x) \neq \alpha$.

Приводятся формулировки двух теорем, которые эквивалентны теореме 1, если существует $f'(x)$.

В качестве примера исследуется метод Ньютона: $f(x) = x - \frac{\varphi(x)}{\varphi'(x)}$. Теорема 3 устанавливает, что если в интервале есть корень $\varphi(x)$, то последовательность метода Ньютона, начинающаяся с любой точки интервала, сходится к упомянутому корню тогда и только тогда, когда во всем интервале

$$\frac{\varphi\left(x - \frac{\varphi(x)}{\varphi'(x)}\right)}{\varphi(x)} \cdot \frac{\varphi'\left(x - \frac{\varphi(x)}{\varphi'(x)}\right)}{\varphi'(x)} > 0.$$

М. К. Гавурин

10 В262. Решение уравнения $ze^z = a$. Wright E. M. Solution of the equation $ze^z = a$. «Proc. Roy. Soc. Edinburgh», 1958—1959, A65, № 2, 193—203 (англ.)

Автор исследует свойства корней Z_n, $n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$ уравнения

$$ze^z = a,\ a \neq 0,$$

и получает быстро сходящиеся ряды для $Z_n = X_n + iY_n$ для всех n или же для всех n таких, что $|n| > n_0(a)$ (в последнем случае $n_0(a)$ обычно достаточно мало). Члены этих рядов являются поочередно вещественными и чисто мнимыми, что удобно для вычислений. Для вычисления Z_n для остальных значений n ($-n_0(a) \leqslant n \leqslant n_0(a)$) показывается, как получить первое приближение и улучшить его до требуемой степени точности. Основные результаты реферируемой статьи были ранее опубликованы автором без доказательства (Wright E. M., Bull. Amer. Math. Soc., 1959, 65, № 2, 89 — 93). Г. В. Кузьмина

10 В263. О приближенном вычислении кратных интегралов. Бахвалов Н. С. «Вестн. Моск. ун-та. Сер. матем., механ., астрон., физ., химии», 1959, № 4, 3—18

Рассматривается вопрос об оценках погрешности, возникающий при приближенном вычислении интеграла

$$I(f) = \int_0^1 \ldots \int_0^1 f(x_1, \ldots, x_m)\, dx_1, \ldots, dx_m$$

при применении среднего арифметического способа вычисления его. Произведены оценки снизу максимума величины возможной ошибки $R_N(f)$ (N — число точек, в которых вычисляются значения функции f и ее производных) при вычислении интегралов от функций, обладающих определенной гладкостью. Показано, что если $f \in H(p, A, \lambda)$, то при любом способе вычисления интеграла

$$\sup_{f \in H(p,A,\lambda)} |R_N(f)| \geqslant C'_{m,p+\lambda} AN^{-\frac{p+\lambda}{m}},$$

а при любом недетерминированном способе вычисления интеграла

$$\sup_{f \in H(p,A,\lambda)} \text{M. O.} |R_N(f)| \geqslant C''_{m,p+\lambda} AN^{\frac{-p+\lambda}{m} - \frac{1}{2}}.$$

Здесь M. O.— математическое ожидание, $C'_{m,p+\lambda}$, $C''_{m,p+\lambda}$ — некоторые постоянные, зависящие только от $m, p + \lambda$. С другой стороны, построен способ вычисления интеграла, для которого

$$\sup_{f \in H(p,A,\lambda)} |R_w(f)| = O\left(AN^{\frac{-p+\lambda}{m}}\right),$$

$$\sup_{f \in H(p,A,\lambda)} \text{M. O.} |R_N(f)| = O\left(AN^{\frac{-p+\lambda}{m} - \frac{1}{2}}\right).$$

Рассмотрен вопрос о существовании хороших квадратурных формул для случая, когда $f \in E_\gamma(A)$, где $E_\gamma(A)$, $\gamma > 1$,— класс функций периодических с периодом 1 по каждому из переменных и таких, что коэффициенты Фурье удовлетворяют условию $|c_n| \leqslant \frac{A}{|||\mathbf{n}|||^\gamma}$. Здесь и дальше $\mathbf{n} = (n_1, \ldots, n_m)$, $\overline{p} = \max(1, |p|)$;

$$|||\mathbf{n}||| = \prod_{k=1}^{m} \overline{n_k},\ (\mathbf{n}, \mathbf{a}) = \sum_{k=1}^{m} n_k a_k.$$

Для квадратурных формул вида

$$\sum_N^P(f) = \frac{1}{N} \sum_{j=0}^{N-1} f(jP),$$

где $P = \left(\frac{a_1}{N}, \ldots, \frac{a_m}{N}\right)$, a_k — целые, величина ошибки $R_N^P(f)$ оценивается в теореме: Если при $|||\mathbf{n}||| < M > 1$ не имеется точек $\mathbf{n}$ таких, что $\mathbf{n} \neq 0$ и $(\mathbf{n}, \mathbf{a}) \equiv 0 (\mathrm{mod}\, N)$, то

$$|R_N^P(f)| \leqslant \varkappa_{m,\gamma} A \frac{\ln^{m-1} M}{M^\gamma}.$$

В случае $m = 2$ при помощи аппарата цепных дробей показано, что для хороших квадратурных формул можно непосредственно указать такие точки P, что

$$R_N^P(f) = O\left(A \cdot \frac{\ln N}{N^\gamma}\right).$$

Эта оценка, как и ряд других, приведенных в работе для $m = 2$, не может быть существенно улучшена. Исследован вопрос о множестве точек P, соответствующих хорошим квадратурным формулам, а именно, если

$$\left(\sum_{j=-N}^{N} z^j\right)^t = \sum_{j=-Nt}^{Nt} \mu_{N,t}^j z^j,$$

t — наименьшее целое число такое, что $t \geqslant \gamma$,

$$S_{N,t}(f) = (2N+1)^{-t} \sum_{j=-Nt}^{Nt} \mu_{N,t}^j f(jP)$$

— формула приближенного вычисления интеграла, то доказана теорема: При любом $\alpha > 0$ для почти всех точек P единичного куба при всех N имеет место

$$\max_{f \in E_\gamma(A)} |R_{N,t}^P(f)| \leqslant \frac{\varkappa_\gamma(P, \alpha) A}{N^\gamma} \ln^{(m+\alpha)(\gamma+1)} N.$$

В. И. Лебедев

10 В264. Об одном приближенном методе кратного интегрирования. Александров С. И. «Уч. зап. Глазовск. гос. пед. ин-т», 1959, вып. 6, 3—11

Ортогонализируя с весом $p(x, y) = 1$ на квадрате $(-1,1; -1,1)$ последовательность линейно независимых функций двух переменных $\{(x-y)^n\}$ $(n = 0, 1, 2, \ldots)$, автор приходит к последовательности ортогональных многочленов вида

$$P_n(x, y) = \sum_{k=0}^{n} p_k (x-y)^k,$$

где p_k — коэффициенты. Указанный квадрат пересекают n прямых $x - y = b_i$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$ (автор называет их «корневыми прямыми») таких, что

$$P_n(y + b_i, y) \equiv 0.$$

Утверждается, что все «корневые прямые» многочлена P_n — действительные и простые, а соседние многочлены не могут иметь общей корневой прямой. Для функций $f(x, y)$, непрерывных на данном квадрате, строится интерполирующая функция

$$L(x, y) = \sum_{k=1}^{n} f(y + b_k, y)\, l_k(x - y),$$

где

$$l_k(x-y) = \frac{(x-y-b_1)\ldots(x-y-b_{k-1})(x-y-b_{k+1})\ldots(x-y-b_n)}{(b_k-b_1)\ldots(b_k-b_{k-1})(b_k-b_{k+1})\ldots(b_k-b_n)}$$

такая, что

$$L(y + b_i, y) = f(y + b_i, y) \quad (i = 1, 2, \ldots, n).$$

Интерполяционная формула Лагранжа для n раз непрерывно дифференцируемой функции $f(x, y)$ на прямоугольнике $(-2,2; -1,1)$

$$f(x, y) = L(x, y) + R_n,$$

$$|R_n| = \left|\frac{f_x^{(n)}(\xi, y)}{n!}\right| \leqslant M_n \cdot \frac{4^n}{n!} \quad (-2 < \xi < 2),$$

$$\left(M_n = \max |f_x^{(n)}(x, y)|\right)$$

применяется для приближенного кратного интегрирования; точное равенство имеет место, если $f(x, y)$ — многочлен степени $\leqslant n-1$ относительно x и y. Решен пример. Д. Б. Тополянский

10 В265. Способ численной оценки конечных интегралов от осциллирующих функций. Longman I. M. A method for the numerical evaluation of finite integrals of oscillatory functions. «Math. Comput.», 1960, **14**, № 69, 53—59 (англ.)

Дается распространение на случай интегралов в конечных пределах преобразования Эйлера, примененного ранее автором к вычислению интегралов в бесконечных пределах, а также вычисление конечных сумм некоторых рядов. Для вычисления осциллирующего ряда конечного числа медленно убывающих членов

$$S = v_0 - v_1 + v_2 - \ldots + (-1)^n v_n, \quad v_i > 0 \qquad (1)$$

(например,

$$S = 9999^{1/2} - 9998^{1/2} + 9997^{1/2} - \ldots + 1^{1/2}) \qquad (2)$$

предлагается следующий способ: образуется присоединенный к (1) ряд

$$S(x) = v_0 - v_1 x + v_2 x^2 - \ldots + (-1)^n v_n x^n.$$

Тогда

$$S(x) = \frac{v_0 + (-1)^n v_n x^{n-1}}{1+x} - y\,[\Delta v_0 - (\Delta v_1)x + (\Delta v_2)x^2 + \ldots + (-1)^{n-1}(\Delta v_{n-1})x^{n-1}],$$

где $y = \frac{x}{1+x}$. Применение данного преобразования p раз дает

$$S(x) = (v_0 - y\Delta v_0 + y^2\Delta^2 v_0 + \ldots + (-1)^{p-1} y^{p-1}\Delta^{p-1} v_0) \times \frac{1}{1+x} + (-1)^n [v_n x^{n+1} + (\Delta v_{n-1})x^n y + (\Delta^2 v_{n-2})x^{n-1}y^2 + \ldots + (\Delta^{p-1} v_{n-p+1})x^{n-p+2}y^{p-1}] \times \frac{1}{1+x} + (-1)^p y^p [\Delta^p v_0 - (\Delta^p v_1)x + (\Delta^p v_2)x^2 + \ldots + (-1)^{n-p}(\Delta^p v_{n-p})x^{n-p}], \quad p \leqslant n.$$

Беря $x = 1$ и полагая n достаточно большим, автор получает для ряда (1) представление

$$S = \frac{1}{2}v_0 - \frac{1}{4}\Delta v_0 + \frac{1}{8}\Delta^2 v_0 - \ldots + (-1)^n\left[\frac{1}{2}v_n + \frac{1}{4}\Delta v_{n-1} + \frac{1}{8}\Delta^2 v_{n-2} + \ldots\right].$$

Дается приложение данного метода к вычислению суммы ряда

$$1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \ldots - \frac{1}{1000}$$

и ряда (2), а также к вычислению интеграла

$$\int_0^{100\pi} (100^2\pi^2 - x^2)^{1/2} \sin x\,dx = \sum_{r=0}^{99} (-1)^r \int_0^{\pi} [100^2\pi^2 - (r\pi + x)^2]^{1/2} \sin x\,dx.$$

А. Л. Крылов

10 В266. Сходимость квадратурных формул Гаусса. Barrett W. Convergence properties of Gaussian quadrature formulae. «Comput. J.», 1961, **3**, № 4, 272—277 (англ.)

Остаток $R_n(f)$ интерполяционной квадратурной формулы

$$\int_a^b w(x) f(x)\,dx = \sum_{k=1}^{n} \lambda_k f(x_k) + R_n(f),$$

где $w(x)$ — весовая функция и $f(x)$ регулярна в некоторой области комплексной плоскости, представляется в виде контурного интеграла. Исходя из этого представления, автор получает асимптотическое выражение для $R_n(f)$, когда $w(x)$ — весовая функция Якоби и $f(x)$ в эллипсе с фокусами ± 1 не имеет других особенностей, кроме простых полюсов в точках z_0 и $\bar{z}_0$ или имеет особенность на конце отрезка интегрирования. Приводятся также приближенные выражения остатков $R_n(f)$ при некоторых предположениях относительно функции $f(x)$ для квадратурных формул с бесконечным отрезком интегрирования с весовыми функциями Лягерра и Эрмита. Указывается построение квадратурных формул, основанное на представлении остатка $R_n(f)$ в виде контурного интеграла, путем соответствующего выбора функций, стоящих под знаком интеграла. Автор получает две такие формулы. Приводится пример вычисления интеграла по квадратурной формуле Гаусса с весом Лягерра и по одной из формул, полученных автором, и сравнивается точность их вычисления. Автор не ссылается на работу В. А. Фока (Об остаточном члене некоторых формул квадратур, ИАН, ОМЕН, 1932), в которой рассматриваются вопросы нахождения приближенного выражения остатков квадратурных формул Гаусса с весом Чебышева $w(x) = 1/\sqrt{1-x^2}$ и с

весом Лягерра $w(x) = x^s e^{-x}$ для аналитических функций таким же способом. Л. А. Янович

10 В267. Правило Симпсона для неравноотстоящих ординат. Shklov N. Simpson's rule for unequally spaced ordinates. «Amer. Math. Monthly», 1960, **67**, № 10, 1022—1023 (англ.)

Интегрируя интерполяционный многочлен Ньютона второй степени, построенный по узлам — h, O, k для подынтегральной функции, и выполняя элементарные преобразования, автор получает формулу для приближенного вычисления интегралов, аналогичную формуле Симпсона. Л. А. Янович

10 В268. Об ошибках при численном интегрировании. Stein P. On the error in numerical integration. «Math. Gaz.», 1960, **44**, № 350, 280—283 (англ.)

Устанавливается известный факт, что остаток E квадратурной формулы

$$\int_{-1}^{1} f(x)\,dx = \sum_{s=1}^{p} \xi_s [f(\alpha_s) + f(-\alpha_s)] + E,$$

где

$$\sum_{s=1}^{p} \xi_s \alpha_s^{2r} = \frac{1}{2r+1},\ r = 0, 1, 2, \ldots, n-1,$$

представим в виде

$$E = \int_0^1 \Phi(t)\{f^{(2n)}(t) + f^{(2n)}(-t)\}\,dt,$$

где

$$\Phi(t) = \sum_{s=1}^{p} \frac{l_s(t)\,\xi_s\,(\alpha_s - t)^{2n-1}}{(2n-1)!} - \frac{(1-t)^{2n}}{(2n)!},$$

$l_s(t) = 1$ для $t \leqslant \alpha_s$ и $l_s(t) = 0$, когда $\alpha_s < t$. Для некоторых квадратурных формул показывается знакопостоянство функций $\Phi(t)$ на отрезке $[0, 1]$ и дается оценка остатков E. Л. А. Янович

10 В269. Некоторые применения статистических идей в численном интегрировании. Ajne Björn, Dalenius Tore. Några tillämpningar av statistiska idéer på numerisk integration. «Nord. mat. tidskr.», 1960, **8**, № 4, 145—152, 198, (шведск.; рез. англ.)

Речь идет о приближенных формулах вида

$$\int_{-\infty}^{\infty} g(t)\,dF(t) \approx \sum_{k=1}^{n} w_k g(t_k),$$

где функция $F(t)$ интерпретируется как функция распределения, а $W(t) = \sum_{t_k \leqslant t} w_k$ — как дискретная вероятность распределения. При этом устанавливается соответствие между критерием Колмогорова — Смирнова и ω^2-теста Смирнова, с одной стороны, и методом касательных для приближенного интегрирования интегралов, с другой. Показывается, что метод моментов ведет к квадратурной формуле Гаусса. В. К. Саульев

10 В270. Вычисления резонансных интегралов для высокотемпературных реакторов. Blake J. P. H. Resonance integral calculations for high temperature reactors. «Atomic Energy Establ. Winfrith», 1960, 49 pp., ill. № R 25 (англ.)

Даются расчетные формулы, которые были запрограммированы на быстродействующую машину «Ферранти», для расчета резонансных интегралов и вероятности избежать резонансного поглощения в области энергий от 2 Mev до 0,4 ev для широкой области изменения температуры и концентрации поглотителя в гомогенном реакторе. При этом полный гомогенный резонансный интеграл представлялся в виде суммы трех интегралов. Приведены таблицы резонансных интегралов для тория 232, урана 238 и плутония 240 как функции температуры и концентрации указанных изотопов и дается сравнение с экспериментальными данными в случае малой концентрации соответствующего изотопа. Сравнение удовлетворительное. Кроме того, приведены расчетные формулы для резонансных интегралов и вероятности избежать резонансного поглощения для таблеток резонансного поглотителя. Имеется сравнение с соответствующим расчетом по методу Монте-Карло для таблеток тория 232 в графитовом замедлителе. Наконец, имеются расчетные формулы для многогруппового резонансного поперечного сечения поглощения для конечных значений температуры и концентрации резонансного поглотителя как для гомогенной, так и для гетерогенной среды. В математическом приложении подробно описаны приближенные методы вычисления соответствующих интегралов посредством надлежащей аппроксимации их, обеспечивающей быстроту вычислений на машине и приемлемую точность с существующими теоретическими и экспериментальными результатами. Н. Я. Лященко

10 В271. Применение тригонометрического интерполирования в задачах строительной механики. Лащеников Б. Я. «Тр. Моск. ин-та инж. ж.-д. трансп.», 1961, вып. 131, 276—295

Дается применение тригонометрического интерполирования к графоаналитическому методу расчета стержней на устойчивость и колебания, а также к численному решению дифференциальных уравнений строительной механики с помощью матриц интегрирования или дифференцирования. Рассматривается возможность замены полиномов Лагранжа тригонометрическими интерполяционными полиномами. Указывается, что при этом количество вычислений сокращается, но при вычислении матрицы дифференцирования требуется предварительное вычисление матрицы площадей. И. Ф. Шелихова

10 В272. Вывод интерполяционных формул для случая многих независимых переменных. Thacher Henry C., Jr. Derivation of interpolation formulas in several independent variables. «Ann. N. Y. Acad. Sci.», 1960, 86, № 3, 758—775 (англ.)

Рассматривается вывод интерполяционных формул для функций f, зависящих от векторного аргумента X, компонентами которого служат s независимых переменных $x^{(1)}, x^{(2)}, \ldots, x^{(s)}$. Доказывается теорема. Пусть $\{\varphi_j(X)\}$, $(j = 1, 2, \ldots, W)$ — множество линейно независимых базисных функций; пусть $\{\mathfrak{S}_i\}$, $(i = 1, 2, \ldots, W)$ — множество линейных операторов (не обязательно различных) и пусть $\{X_i\}$ — множество точек (также не обязательно различных). Функция $\Phi(X)$ представима линейной комбинацией функций $\varphi_j(X)$, удовлетворяющей системе условий

$$\mathfrak{S}_i \Phi(X_i) = \mathfrak{S}_i f(X_i)\ (i = 1, 2, \ldots, W)$$

тогда и только тогда, когда определитель

$$|D| \equiv |\mathfrak{S}_i \varphi_j(X_i)| \neq 0,\ (i, j = 1, 2, \ldots, W).$$

Используя результаты теоремы, автор выводит следующую интерполяционную формулу:

$$\Phi(X) = \sum_{j=1}^{w} \frac{|D_j|}{|D|}\,\varphi_j(X),$$

где $|D_j|$ — определитель, равный произведению $(-1)^{j+1}$ на определитель, полученный из $|D|$ заменой элементов j-го столбца на элементы $\mathfrak{S}_i f(X_i)$. Описан способ оценки ошибки интерполяционного метода. Значительная часть работы посвящена рассмотрению примеров. Ю. М. Барабошкин

10 В273. Аппроксимация кривых ломаными. Stone Henry. Approximation of curves by line segments. «Math. Comput.», 1961, **15**, № 73, 40—47 (англ.)

Рассматривается задача о выборе точек u_j $(j=1, 2, \ldots, N-1)$, расположенных на интервале (u_0, u_N), и коэффициентов a_j и b_j $(j=1, 2, \ldots, N)$, обеспечивающих минимум функционала

$$F=\sum_{j=1}^{N}\int_{u_{j-1}}^{u_j}[f(x)-a_j-b_jx]^2\,dx.$$

Исследования на минимум производятся обычным методом. При фиксированных u_j приводятся выражения a_j и b_j для любой интегрируемой функции. Подробно рассмотрен частный случай, когда $f(x)$ — квадратный трехчлен. Тогда a_j, b_j и u_j для ломаной линии находятся в замкнутой форме и имеют простой вид, причем узлы u_j равноотстоящие на (u_0, u_N). Предлагается приближенно находить значения a_j, b_j и u_j путем решения системы $\frac{\partial F}{\partial a_p}=0$, $\frac{\partial F}{\partial b_p}=0$, $\frac{\partial F}{\partial u_p}=0$ методом Ньютона. Для $f(x)=e^{-cx}$ дается таблица значений a_j, b_j, u_j на 3 десятичных знака после запятой для N=2,3,4 и $c=0.1\,(0.1)\,1.0\,(0.2)\,1.2\,(0.3)\,1.5$. Приводятся численные значения $\max(e^{-cx}-a_j-b_jx)$ $(0\leqslant x\leqslant 3)$ для тех же значений N и c. Показывается, что минимизация F, когда $f(x)=r_1+r_2z+r_3e^{-r_4z^2}$, сводится к вышерассмотренному случаю. Л. А. Янович

10 В274. О «лучшей» и «наименьшей Q-й» аппроксимации переопределенной системы линейных уравнений. Goldstein Allen A., Levine Norman, Hereshoff James B. On the «best» and «least Qth» approximation of an overdetermined system of linear equations. «J. Assoc. Comput. Machinery», 1957, **4**, № 3, 341—347 (англ.)

10 В275. Применение интегральной показательной функции от комплексного аргумента. Corrington Murlan S. Applications of the complex exponential integral. «Math. Comput.», 1961, **15**, № 73, 1—6 (англ.)

Рассматривается интеграл

$$E_1(z)=\int_z^\infty\frac{e^{-u}}{u}\,du=RE_1(z)+iIE_1(z),$$

где $z=x+iy$, $RE_1(z)$ и $IE_1(z)$ — действительная и мнимая часть $E_1(z)$. Указана его связь с интегральным синусом и косинусом и дается таблица 31 интеграла, вычисление которых сводится к вычислению действительной и мнимой частей $E_1(z)$. Л. А. Янович

10 В276. Вычисление неполной гамма-функции от мнимого аргумента при помощи многочленов Чебышева. Barakat Richard. Evaluation of the incomplete gamma function of imaginary argument by Chebyshev polynomials. «Math. Comput.», 1961, **15**, № 73, 7—11 (англ.)

Рассматривается вопрос о вычислении интеграла

$$\gamma(\nu, ix)=\int_0^{ix}e^{-t}t^{\nu-1}\,dt,$$

где ν — действительное число. После замены в интеграле $t=ixq$, разложения функции e^{-ixq} в ряд по многочленам Чебышева $T_n(q)$ и выполнения интегрирования автор получает, что

$$\gamma(\nu, ix)=(iq)^\nu\sum_{n=0}^{\infty}\varepsilon_n(-i)^nJ_n(x)\,B_n(\nu),$$

где $\varepsilon_0=2$, $\varepsilon_n=1$ для $n\geqslant 1$,

$$B_n(\nu)=\int_0^1 T_n(q)\,q^{\nu-1}\,dq.$$

Дается таблица значений $B_n(\nu)$ для $\nu=0.2\,(0.2)\,0.8$ и $n=0\,(1)\,15$ на 9—7 значащих цифр и таблицы значений действительной и мнимой частей функции $\gamma_1(\nu, ix)=(iq)^{-\nu}\gamma(\nu, ix)$ для тех же значений ν и $x\,0\,(0.1)\,5$ на 7—6 значащих цифр. Приведен пример, показывающий быструю сходимость этого ряда. Указывается на некоторые другие способы вычисления $\gamma(\nu, ix)$. Л. А. Янович

10 В277. Вычисление обыкновенных логарифмов. Love E. R. The calculation of common logarithms. «Math. Gaz.», 1960, **44**, № 350, 277—280 (англ.)

На конкретных примерах автор излагает простейший метод приближенного вычисления логарифмов, аналогичный методу Непера. Ю. М. Барабошкин

10 В278. Вычисление arc tg N для $-\infty<N<+\infty$ на электронной вычислительной машине. Kogbetliantz E. G. Computation of arctan N for $-\infty<N<+\infty$ using an electronic computer. «IBM J. Res. and Developm.», 1958, **2**, № 1, 43—53 (англ.)

10 В279. Дальнейшие вычисления постоянной Хинчина. Wrench John W., Jr. Further evaluation of Khintchine's constant. «Math. Comput.», 1960, **14**, № 72, 370—371 (англ.)

Выводится значение постоянной Хинчина

$$K=\prod_{r=1}^{\infty}\left(1+\frac{1}{r(r+2)}\right)^{\ln r/\ln 2}$$

с 155 десятичными знаками ($K=2{,}68545\ldots$).

10 В280. Обработка наблюдений. Палкин В. К. «Морск. сб.», 1961, № 2, 45—57

Кратко излагаются основные вопросы обработки результатов наблюдений и условия их применения для анализа ошибок решения задач. Рассмотрены три основных класса ошибок измерений: ошибки грубые, систематические и случайные. Содержатся общие сведения о параметрах нормального закона (стандарт σ), классической оценке надежности измерений, наиболее достоверном значении измеряемой величины (стандарт среднего, оценка ошибок прибора по эталону, оценка ошибок прибора по среднему). Приводятся замечания относительно оценки среднего по выборочному стандарту. Автор останавливается на понятии о весе измерений, ошибках функции приближенных аргументов. Дается общая трактовка вопроса о сложении случайных ошибок, действующих по одному направлению и сложении случайных ошибок на плоскости (эллипс ошибок). Изложенное проиллюстрировано примерами.

И. Ф. Шелихова

10 В281. Метод промежуточных функций для оценки точности функций величин, уравновешенных упрощенным способом. Гордеев А. В. «Тр. Моск. ин-та инж. землеустройства», 1960, вып. 10, 89—110

Рассматривается вопрос об оценке точности функций при упрощенных способах уравновешивания, применяющихся при обработке съемочных сетей. Сюда относятся способы раздельного уравновешивания в два этапа и способы, при которых уравновешиваются зависимые между собой величины, полученные в результате их вычисления как функций независимых измерений. Дается общий и простой метод оценки точности функций уравновешенных элементов, названный методом промежуточных функций. В основе метода лежит разложение ошибки Δu и функции $u=\Phi(\gamma_{i1}, \gamma_{i2}, \ldots, \gamma_{it})$ уравновешенных величин $\gamma_{i1}, \gamma_{i2}, \ldots, \gamma_{it}$ по ошибкам промежуточных функций $\Delta\xi$, т. е. получение выражения вида $\Delta u=[f\cdot\Delta\xi]$. На основе предлагаемого метода выводятся формулы для оценки точности, соответствующие наиболее распространенным в геодезической практике способам упрощенного уравновешивания. Показано, что вид формул для коэффициентов f_t зависит от применяемого способа уравновешивания на втором эта-

пе, а вид формулы для веса p_u — от применяемого способа на первом этапе. При этом применение предлагаемого метода позволяет получить соответственно каждому виду геодезической сети формулу веса p_u, общую для всех функций уравновешенных величин в этой сети. Приводятся примеры на применение к некоторым простейшим геодезическим сетям полученных формул по оценке точности. И. Ф. Шелихова

10 В282. Исследование систем регулирования с помощью частотных диаграмм. Обморшев А. Н. «Изв. высш. учебн. заведений. Машиностроение», 1958, № 5, 3—15

При количественном анализе процессов, протекающих в системах автоматического регулирования и других системах подобного рода, часто дело сводится к решению некоторого характеристического уравнения. Для быстрого и простого приближенного анализа этого уравнения желательно иметь набор заранее заготовленных таблиц или графиков, позволяющих свести нахождение корней уравнения к немногим элементарным операциям. В реферируемой работе изложен приближенный метод решения алгебраического уравнения с полиномиальной левой частью ($n \geqslant 2$), с коэффициентом при старшей степени равным единице при помощи специальных графиков. Этот метод позволяет довольно быстро и легко находить приближенные значения как комплексных, так и вещественных корней характеристического уравнения с вещественными коэффициентами. При этом необходимо иметь диаграммы функций корней или, в предположении существования у уравнения хотя бы пары комплексно сопряженных корней, частотные диаграммы. Метод наиболее эффективен для случая уравнений 3-й и 4-й степеней. Автор указывает, что при повышении степени уравнения эффективность рассматриваемого метода быстро падает из-за увеличения числа диаграмм. С помощью элементарных алгебраических преобразований уравнение

$$\sum_{i=0}^{n} A_{n-i} z^i = 0 \quad (A_0 = 1)$$

приводится к виду:

$$\sum_{i=0}^{n} B_{n-i} \xi^i = 0 \quad (B_0 = 1,\ B_1 = 0,\ B_n = \pm 1).$$

Используя формулы Виета и вводя параметры $\xi = \xi_1 \cdot \xi_2$ и $\eta = \xi_1 + \xi_2$ (ξ_i — корни приведенного уравнения), получают линейную совместную систему из n уравнений с $n-2$ неизвестными $f_1, \ldots, f_{n-2}$, где f_s — элементарный симметрический многочлен порядка s относительно корней $\xi_3, \ldots, \xi_n$ приведенного уравнения. Разрешая полученную систему относительно f_s и фиксируя $n-4$ параметров — коэффициенты B_j — из $n-2$, можно построить диаграммы, отображающие зависимость корней уравнения (точнее ξ и η) от его параметров. Детально рассматриваются случаи $n = 2, 3, 4$. Приводятся частотные диаграммы и диаграммы функций корней для уравнения 3-й и 4-й степеней. Даются общие соображения по построению подобных диаграмм для уравнений степени $n > 4$. Сделан небольшой экскурс в историю рассматриваемого вопроса.

Примечание референта. В работе довольно много опечаток. Кроме того, в формуле (8) вместо C_n^j должно быть C_{n-k+j}^j; к формуле (15) нужно добавить: $n \geqslant 2$, $j \geqslant 1$, $f_{-1} \equiv 0$, $f_0 \equiv 1$. Наконец, при преобразовании исходного уравнения к приведенному необходимо указать, что b не должно быть корнем исходного уравнения. Г. П. Гаврилов

10 В283. Заметка о конечных разностях. Parker R. V. Finite difference notation. «Math. Gaz.», 1960, 44, № 349, 220—223 (англ.)

Известная формула для обобщенной отрицательной степени $x^{-k} = [(x+k-1)^{(k)}]^{-1}$ (см., например, Гельфонд А. О., Исчисление конечных разностей. М., 1952, стр. 310) может быть без утраты основного свойства ($\Delta x^{(-k)} = (-k)\, x^{(-k-1)}$) заменена формулой $x^{(-k)} = [(x+k+c)^{(k)}]^{-1}$, где c — любое вещественное число. При этом наиболее естественным является значение $c = 0$, так как только при таком выборе c для любых целых k имеет место тождество $r^{(k)}(r-k)^{(n)} = r^{(k+n)}$. Значение $c = -1$ в определении $r^{(-k)}$ принято Булем (Boole George, Treatise on the Calculus of Finite Differences, Macmillan, 1860) «без видимых оснований»; $c = 0$ было еще у Вандермонда. М. Л. Бродский

10 В284. Анализ сетей численными методами. Gill Arthur. Analysis of nets by numerical methods. «J. Assoc. Comput. Machinery», 1960, 7, № 3, 251—254 (англ.)

Пусть ориентированная или неориентированная сеть (понятия и обозначения см. РЖМат, 1958, 5767) содержит n вершин $v_1, v_2, \ldots, v_n$ и N ребер $b_k = (v_i, v_j)$, где $k = 1, 2, \ldots, N$. Ребрам $b_1, b_2, \ldots, b_N$ сопоставляются веса — простые числа $p_1, p_2, \ldots, p_N$. Строятся матрица соединений C и ее степени, причем сложение производится формально (путем выписывания всех слагаемых), а умножение, например, так: $(6+10)\cdot 7 = 42+70$. Тогда все пути длины L, соединяющие v_i и v_j, могут быть получены путем (однозначного!) разложения на множители слагаемых входящих в $(C^L)_{ij}$. Указаны алгоритмы отыскания всех собственных путей и собственных циклов длины L всех ориентированных гамильтоновых линий сети. М. Л. Бродский

10 В285. Методы дискретного переменного в численном анализе. Lehmer D. H. Discrete variable methods in numerical analysis. «Proc. Internat. Congr. Mathematicians, 1958». Cambridge, Univ. Press, 1960, 545—552 (англ.)

Дискретный характер быстродействующих цифровых машин привел ко многим специфическим осложнениям при моделировании задач анализа; существует, однако, широкий и важный класс дискретно-логических, комбинаторных задач, которые точно решаются на этих машинах (без использования арифметических псевдоопераций). Существующие библиотеки подпрограмм не приспособлены к решению дискретно-логических задач; отмечается важность чисто логических подпрограмм, например, подпрограммы, выдающей последовательно все перестановки данных n чисел. Эта и подобные ей логические подпрограммы, специальные логические команды были с успехом применены к решению чисто аналитической задачи. Именно был подобран пример, опровергающий следующую гипотезу Харди и Литлвуда: если $f^*(\theta) = 1 + \sum_1^\infty a_k \cos k\theta$; $1 \geqslant a_1 \geqslant a_2 \geqslant \ldots \geqslant 0$, последовательность $|c_i|$ ($i = 1, 2, \ldots$) — перестановка последовательности a_k ($k = 1, 2, \ldots$), $f(\theta) = 1 + \sum_1^\infty c_k \cos k\theta$, то $\int_0^\pi |f^*(\theta)|\, d\theta < \int_0^\pi |f(\theta)|\, d\theta$. Подробно изложено, как решалась эта задача (опровергающий пример: $f(\theta) = 1 - 3/4 \cos\theta + 3/4 \cos 2\theta - 1/2 \cos 3\theta + 3/4 \cos 4\theta$). М. Л. Бродский

10 В286. Быстрый гармонический анализ эмпирических периодических функций. Schönbacher Karl. Harmonische Schnellanalyse empirischer, periodischer Funktionen. «Elektrotechn. Z.», 1960, **A81**, № 23, 808—812, 2, 5 (нем.; рез. англ., франц.)

Подробно описывается метод вычислений при приближенном гармоническом анализе и синтезе эмпириче-

ских периодических функций, основанный на замене заданной кривой 12-сторонней ломаной линией, построенной таким образом, чтобы аппроксимация была оптимальной. Для вычисления приближенных значений составляющих гармоник выводятся формулы вида

$$a_\nu = 24\,(\pi\nu)^{-2}\sin^2(\pi\nu/12)\sum_\eta Y_\eta\cos(\nu\eta\cdot\pi/6),$$

$$b_\nu = 24\,(\pi\nu)^{-2}\sin^2(\pi\nu/12)\sum_\eta Y_\eta\sin(\nu\eta\cdot\pi/6),$$

где Y_η — ординаты вершин ломаной линии, определяемые из чертежа, ν — порядковый номер гармоники. Поясняется методика применения вычислительных шаблонов (при делении периода на 12 равных частей) для проведения расчетов по указанным формулам. Дается подробный анализ схемы гармонического синтеза. Оценивается погрешность. Отмечается, что предложенный метод является наиболее простым из существующих практических методов, так как вычислительная работа сводится лишь к непосредственному построению шаблонов. Статья проиллюстрирована графиками.

И. Ф. Шелихова

10 В287. Извлечение квадратных корней с помощью вычислительных машин. Thirion R. Extraction d'une racine carrée à l'aide d'une machine à calculer. «Méc. industr.», 1960, **7**, № 53, 14—16 (франц.)

Описан простой и экономичный способ, позволяющий с помощью вычислительных машин после небольшого количества вычислений извлекать квадратные корни с большой точностью. Сформулировано следующее правило. Подкоренное число A справа налево разбивается на p групп, содержащих по две цифры, т. е.

$$A = A_1 + 100\,A_2 + \ldots + 10^{2(p-1)}A_p.$$

Из крайней слева p-й группы последовательно вычитаются простые числа $1, 3, 5, \ldots, 2n_p - 1$ ($n = 1, 2, 3, \ldots$). После числа вычитаний, равного n_p, разность становится меньше следующего вычитаемого простого числа, т. е. $r_p < 2n_p + 1$. Тогда n_p есть цифра старшего разряда искомого корня. Далее, переходя к $(p-1)$-й группе, вычитают из числа $100\,r_p + A_{p-1}$ последовательность простых чисел $20\,n_p + 1$, $20\,n_p + 3, \ldots$ и т. д., первое из которых получается путем прибавления единицы к крайней справа цифре последнего вычитаемого p-й группы и приписывания к полученной цифре единицы справа. Число операций вычитания, равное n_{p-1}, дает вторую цифру корня и т. д. Процесс вычислений повторяется до получения желаемой точности. Приписывая, к числу A справа группы, состоящие из двух нулей, можно получать квадратные корни с любым числом верных знаков. Приводится числовой пример.

И. Ф. Шелихова

10 В288. Извлечение корней с помощью малых вычислительных машин. Meurer H. Wurzelberechnung mit Vierspeziesrechnern. «Neue Techn. Büro», 1960, **4**, № 10, 325—327 (нем.)

Излагается приближенный способ вычисления корней n-й степени по итерационной формуле

$$x_{n+1} = \frac{(p-1)\,x_n^p + a}{p\,x_n^{p-1}} \quad (p = 2, 3, 4, \ldots),$$

позволяющий после относительно небольшой вычислительной работы получать высокую точность расчетов. Выясняется геометрический смысл указанной формулы и проводится исследование сходимости итерационного процесса. На конкретном примере поясняется методика извлечения квадратных корней при проведении вычислений на счетных автоматах «Мерседес».

И. Ф. Шелихова

10 В289. Об одном общем методе нахождения максимума. Pütter Paul Stefan. Ein allgemeines Maximalisierungsverfahren. «Z. angew. Math. und Mech.», 1959, **39**, № 12, 466—472 (нем.; рез. англ., франц., русск.)

Предлагается численный метод нахождения максимума функции

$$f(x_1, \ldots, x_N)$$

при выполнении дополнительных условий

$$g_\mu(x_1, \ldots, x_N) = 0,\ \mu = 1, \ldots M\ (< N),$$

$$h_\nu - x_\nu \geqslant 0,\ \nu = 1, \ldots, N,$$

$$x_\nu - j_\nu \geqslant 0,\ \nu = 1, \ldots, N.$$

Предполагается, что функция f и g_μ дифференцируемы и g_μ независимы. Метод был запрограммирован и испытан на машине ИБМ-650.

М. К. Керимов

10 В290. Оптимальный последовательный поиск и методы аппроксимации при минимальных условиях регулярности. Kiefer J. Optimum sequential search and approximation methods under minimum regularity assumptions. «J. Soc. Industr. and Appl. Math.», 1957, **5**, № 3, 105—136 (англ.)

Рассмотрим множество F функций f, заданных на некотором множестве. Пусть требуется дать правило s для оценки некоторой величины $d(f)$, связанной с функцией $f \in F$, по значениям функции в нескольких точках, причем нужно минимизировать $\sup_{f\in F} L(f, s)$, где $L(f, s)$ — функция потерь. Например, если F — множество унимодальных функций на единичном отрезке, $g(f)$ — мода f (т. е. при $x \leqslant g(f)$ функция f строго возрастает, при $x > g(f)$ — строго убывает), множество $\widetilde{S}_N$ допустимых правил есть множество правил, сопоставляющих значениям функции в N точках $x_1, \ldots, x_N$ интервал d, содержащий $g(f)$ и $L(s, f)$ — длина этого интервала, то ε-минимаксное правило s_N^*, обладающее свойством

$$\sup_{f\in F} L(f, s_N^*) \leqslant \varepsilon + \inf_{s\in\widetilde{S}_N}\sup_{f\in F} L(f, s),$$

описывается следующим образом. Пусть u_n есть n-е число Фибоначчи. Определим s_2^* так: $x_1 = \frac{1}{2}$, $x_2 = \frac{1}{2} + \varepsilon$ и $d = [0, x_2]$ или $[x_1, 1]$, если соответственно $f(x_1) \geqslant f(x_2)$ или $f(x_1) < f(x_2)$. Если s_{N-1}^* ($N \geqslant 3$) уже определено, то для определения s_N^* положим $x_1 = \frac{u_{N-1}}{u_{N+1}}$, $x_2 = \frac{u_N}{u_{N+1}}$ и в соответствии со значениями $f(x_1)$ и $f(x_2)$ выберем из двух интервалов $[0, x_2]$ и $[x_1, 1]$ интервал, содержащий $g(f)$. Затем подобно преобразуем выбранный интервал в единичный и к получившемуся интервалу применим правило s_{N-1}^* (легко проверяется, что одна из точек, в которых, следуя правилу s_{N-1}^*, нужно вычислять значения функции f, есть образ x_2 или x_1, т. е. в ней значение f уже известно). Дается также минимаксное правило для нахождения точки перегиба функции. Изучается асимптотическое поведение при $\theta \to \infty$ числа точек, в которых нужно знать значения возрастающей функции $f(x)$, $0 \leqslant x \leqslant \theta$, для того, чтобы указать интервал длины 1, где находится нуль этой функции. Рассматривается также вопрос о квадратурных формулах в классах неубывающих функций и функций, удовлетворяющих условию Липшица.

В. Н. Тутубалин

10 В291. Точный метод для обрываемых асимптотических рядов. Roe Glenn M. An accurate method for terminating asymptotic series. «J. Soc. Industr. and Appl. Math.», 1960, **8**, № 2, 354—367 (англ.)

Изложен метод вычисления функций путем обрывания их асимптотических рядов. Рассматривается асимптотический ряд для функции $S(x)$

$$S(x) = T(0) + T(1) + T(2) + \ldots,$$

где $T(n) = \frac{A(n)}{x^n}$, $A(n)$ — коэффициент при $\frac{1}{x^n}$. Предлагается следующий способ обрывания ряда при вычислениях:

$$S(x) \cong T(0) + T(1) + \ldots + T(M) + C_1 + C_2 + C_3, \quad (1)$$

где M — точка такая, что $T(M-1) > T(M) < T(M+1)$,

$$C_1 = T(M)\left\{1 - \frac{1}{3p} - w\right\}, \quad C_2 = T(M)\,\delta_2\left\{\frac{4}{135\,p^2} + \frac{w}{3}(1-w)\left(2 - w - \frac{2}{p}\right)\right\},$$

$$C_3 = -T(M)\,\delta_2^2\left\{\frac{1}{15}w^5 + \left(\frac{1}{3p} - \frac{1}{3}\right)w^4 + \left(\frac{2}{9p^2} - \frac{2}{3p} + \frac{1}{3}\right)w^3 + \left(\frac{2}{135\,p^3} - \frac{1}{3p^2} + \frac{1}{3p}\right)w^2 + \left(\frac{-4}{135\,p^4} + \frac{2}{135\,p^3} + \frac{1}{9p^2} - \frac{1}{15}\right)w + \frac{76}{2835p^5} + \frac{2}{135p^4} - \frac{2}{5p^3} - \frac{1}{180p} + Q\right\},$$

$$Q = \frac{1}{3p^4}\left\{\frac{13}{12}p + a_1^2\left(1 - \frac{1}{p}\right) - 2a_2\right\}, \quad w = \frac{\delta_1}{\delta_2},$$

$$\delta_1 = \frac{T(M+1)}{T(M)} - 1, \quad \delta_2 = \frac{T(M+1)}{T(M)} - \frac{T(M)}{T(M-1)}.$$

Константы p, a_1, a_2 определяются из выражения

$$\frac{A(n)}{A(n-1)} \simeq a_0 n^p\left\{1 + \frac{a_1}{n} + \frac{a_2}{n^2} + \frac{a_3}{n^3} + \cdots\right\}.$$

Выводятся формулы для вычисления погрешностей, возникающих при использовании выражения (1). Указывается, что изложенный метод сочетает простоту вычислительных формул с повышенной точностью результата. Приводятся также выражения для вычисления функций в случае произвольного обрывания асимптотического ряда. Библ. 5 назв.

Ю. М. Барабошкин

10 В292. Вычисление гамма-функции с высокой точностью. Sherry M. E., Fulda S. Calculation of gamma functions to high accuracy. «Math. Tables and Other Aids Comput.», 1959, **13**, № 68, 314—315 (англ.)

На быстродействующей вычислительной машине вычислены значения $\Gamma\left(\frac{1}{3}\right)$, $\Gamma\left(\frac{2}{3}\right)$ и их натуральных логарифмов $\ln\Gamma\left(\frac{1}{3}\right)$ и $\ln\Gamma\left(\frac{2}{3}\right)$ с 35 значащими цифрами. При вычислении $\ln\Gamma(x)$ были использованы асимптотическое разложение

$$\ln\Gamma(x) \sim \left(x - \frac{1}{2}\right)\ln x - x + \frac{1}{2}\ln 2\pi + \sum_{r=1}^{\infty}\frac{C_r}{x^{2r-1}}$$

и формулы

$$\Gamma(x+n) = (x)_n\,\Gamma(x),$$

где

$$(x)_n = (x+n-1)(x+n-2)\ldots(x+1)x,$$

$$\ln\Gamma(x) \sim \lambda(x) + \sum_{r=1}^{\infty}\frac{C_r}{(x+n)^{2r-1}},$$

где $\lambda(x) = \left(x + n - \frac{1}{2}\right)\ln(x+n) - (x+n) + \frac{1}{2}\ln 2\pi - \sum_{j=0}^{n-1}\ln(x+j)$. Функция $\Gamma(x)$ вычисляется по формуле

$$\Gamma(x) = e^{\psi}\,e^{\ln\Gamma(x) - \psi},$$

где $\psi = \pm 0,1\,n$. Значения $e^{\pm 0,1\,n}$ при $n = 0(1)\,10$ были взяты из готовых таблиц. Так как

$$|\ln\Gamma(x) - \psi| < 0{,}05,$$

то $e^{\ln\Gamma(x)}$ легко вычисляется разложением в степенной ряд и использованием нескольких его членов. Суммарная относительная погрешность не превышает $\pm 3.10^{-35}$. Контроль вычислений велся при помощи формулы

$$\Gamma(1/2)\,\Gamma(2/3) = \frac{2\pi}{\sqrt{3}}.$$

М. К. Керимов

10 В293. Введение в теорию приближенных вычислений. Francia G. Introduzione al calcolo numerico approssimatone. «Period. mat.», 1959, **37**, № 5, 276—294 (итал.)

Излагаются основные арифметические действия над приближенными числами.

М. К. Керимов

10 В294. О конформном отображении внутренности эллипса. Йосикава Х. «Кюсю дайгаку когаку сюхо, Technol. Repts Kyushu Univ.», 1960, **33**, № 2, 49—51 (японск.)

10 В295. Вычисление тороидальных гармоник. Rotenberg A. The calculation of toroidal harmonics, «Math. Comput.», 1960, **14**, № 71, 274—276 (англ.)

Рассматриваются методы, применявшиеся при вычислении присоединенных функций Лежандра первого $P^m_{n-1/2}(x)$ и второго $Q^m_{n-1/2}(x)$ рода на вычислительной машине ИМБ-704. Для вычисления использовалось рекуррентное соотношение

$$(\nu - m)R^m_\nu(x) = (2\nu - 1)xR^m_{\nu-1}(x) - (\nu + m - 1)R^m_{\nu-2}(x), \quad (1)$$

где R^m_ν — одна из функций P^m_ν или Q^m_ν, $\nu = n - 1/2$, m, n — целые числа, $x \geqslant 1$. В силу $R^m_{n-1/2}(x) = R^m_{-n-1/2}(x)$ вычисления проводились только для $n \geqslant 0$. Приводятся соображения о выборе направления рекурсии. Даются формулы для вычисления исходных значений функций P^m_ν и Q^m_ν при счете с использованием соотношения (1). Библ. 5 назв.

Ю. М. Барабошкин

10 В296. Улучшенные формулы для полного и частичного суммирования некоторых рядов. Salzer Herbert E., Kimbro Genevieve M. Improved formulas for complete and partial summation of certain series. «Math. Comput.», 1961, **15**, № 73, 23—39 (англ.)

Рассматриваются улучшенные формулы для вычисления полной и частичной $S_n = S(n)$ суммы ряда, при условии, что частичные суммы ряда S_j ведут себя как четные функции аргумента $1/j$ (РЖМат, 1957, 4395). S и $S(n)$ вычисляются с помощью m-точечных интерполяционных формул Лагранжа соответственно для аргументов $1/j = 0$ или $1/j = 1/n$:

$$S \sim \sum_{i=0}^{m-1} A^{(m)}_{j_0-i}\,S_{j_0-i} = (1/D^{(m)})\sum_{i=0}^{m-1} B^{(m)}_{j_0-i}\,S_{j_0-i},$$

$$S(n) = \sum_{j=4}^{j_0} A_j(n)S_j = (1/D(n))\sum_{j=4}^{j_0} C_j(n)S_j.$$

Приводятся таблицы коэффициентов $B^{(m)}_{j_0-i}$, $D^{(m)}$ для $m = 2(1)7$, $j_0 = 10$; для $m = 11$, $j_0 = 20$. Таблицы даны соответственно с 10 и 20 знаками. Приводятся также таблицы коэффициентов $C_j(n)$, $D(n)$ для $m = 7$, $j_0 = 10$,

$n = 11$ (1) 25 (5) 100, 200, 500, 1000. Подробно рассмотрен ряд примеров. Библ. 13 назв.

Ю. М. Барабошкин

10 В297. Распределение погрешностей результатов вычислений с приближенными числами. Прайсман Н. Я. Розподіл похибок результатів обчислень з наближеними числами. «Наук. зап. Кіровоградськ. держ. пед. ін-т», 1959, **7**, 33—50 (укр.)

С целью обоснования правил округления рассмотрено распределение погрешностей при нахождении логарифма и антилогарифма приближенного числа.

Д. Б. Тополянский

10 В298. К вопросу об обосновании правила подсчета цифр для степени приближенного числа. Прайсман Н. Я. До питання про обгрунтування правила підрахунку цифр для степеня наближеного числа. «Наук. зап. Кіровоградськ. держ. пед. ін-т», 1959, **7**, 19—31 (укр.)

Рассматривается вопрос о вычислении погрешностей (граничной абсолютной и средней квадратической) для произвольной натуральной степени приближенного числа. Д. Б. Тополянский

10 В299. О сокращенной записи абсолютных описаний изображений. Файн В. С. «Изв. АН СССР. Отд. техн. н. Энерг. и автоматика», 1961, № 1, 171—179

Рассматривается вопрос сокращенной записи кривых, образующих абсолютные описания изображений, путем приближенного представления их соответствующими полиномами. Показывается, что наиболее удобным методом приближения является метод интерполирования с равноотстоящими узлами; указывается способ оценки порядка n интерполяционного полинома.

Резюме авторов

10 В300. Работа Бэя «Матричный расчет балок с переменными моментами инерции». Обсуждение. «Matrix solution of beams with variable moments of inertia» by Ming L. Pei. Discussion.—, «J. Struct. Div. Proc. Amer. Soc. Civil Engrs», 1960, **86**, № 4, 101—113 (англ.)

В двух статьях обсуждается работа Бэя «Матричный расчет балок с переменными моментами инерции» (РЖМат, 1960, 10928 и 12174). В первой статье отмечается, что предложенный Бэем метод не нов, и указываются более ранние работы других авторов, в которых применяется данный метод. Рассматриваются также некоторые вопросы, не нашедшие отражения в работе Бэя. Во второй статье метод, предложенный Бэем, распространяется на расчет консольных и вмонтированных балок, причем для последнего случая отмечается существенное увеличение погрешностей. Предлагаются способы повышения точности расчетов. Указывается на большое удобство использования метода при автоматических вычислениях. Ю. М. Барабошкин

10 В301. Окончание дискуссии по статье «Пересечение прямой линии со спиралью». Hickerson T. F. Closure to discussion on the paper: «Intersection of straight line with spiral». «J. Surv. and Mapp. Div. Proc. Amer. Soc. Civil Engrs», 1961, **87**, № 1, Part 1, 49 (англ.)

10 В302. О численных методах с точки зрения электронных машин. Sauer R. Sur les méthodes numériques sous le point de vue des machines électroniques. Научн. сообщ. Нац. политехн. ин-т «Мецовион», Publs Scient. Univ. nat. techn. Athènes—Grèce, 1958, № 14, 22 p., ill. (франц.)

10 В303. Графический способ проведения прямой, расположенной наилучшим способом относительно группы точек. Dolby J. L. Graphical procedure for fitting the best line to a set of points. «Technometrics», 1960, **2**, № 4, 477—481 (англ.)

Ищется прямая

$$y = a + bx, \qquad (1)$$

расположенная относительно группы точек $P_i(x_i, y_i)$ наилучшим образом в смысле Чебышева, т. е. так, чтобы расстояние любой из точек до прямой, например в направлении оси y, не превосходило некоторой величины, значение которой должно быть наименьшим. Автор использует взаимнооднозначное соответствие между каждой точкой P_i в координатной системе (x, y) и прямой

$$a = y_i + (-x_i)b \qquad (2)$$

в прямоугольной координатной системе (b, a). В последней строится семейство прямых (2). Каждая из них соответствует одной из точек P_i. Искомому значению в уравнении (1) соответствует такая прямая, параллельная оси a, отрезок которой, заключенный между двумя экстремальными прямыми семейства (2), имеет наименьшую длину (прямые и части прямых, расположенные между экстремальными, не принимаются во внимание). Элементарными рассуждениями доказывается, что ордината середины указанного отрезка в системе (b, a) представляет величину a, при которой прямая (1) удовлетворяет условию задачи. Способ отличается простотой и наглядностью. Рассмотрены конкретные примеры.

А. Б. Штыкан

10 В304. Графическое решение квадратного уравнения с комплексными корнями. Goodstein R. L. The graphical solution of a quadratic equation with imaginary roots. «Math. Gaz.», 1960, **44**, № 350, 289—290 (англ.)

Для решения уравнения $x^2 + px + q = 0$ в работе (Wigand K., Praxis der Mathematik, Cologne, June, 1959) описан способ, основанный на том, что окружность, расположенная в прямоугольной координатной системе xOy так, что конечные точки одного из диаметров суть $(0,1)$ и $(-p, q)$, пересекает ось x в точках, расстояния которых от начала соответствуют значениям действительных корней. В случае комплексных корней тот же способ применяется к вспомогательному уравнению $x^2 + px + \frac{1}{2}p^2 - q = 0$. Автор предлагает более простой путь нахождения комплексных корней. Из начала O проводится касательная OT к исходной окружности. Из центра O описывается окружность радиуса OT, пересекающая ординату центра первой окружности в точках P_1 и P_2. Если координаты этих точек суть $(u, \pm v)$, то искомые комплексные корни суть $u \pm iv$.

А. Б. Штыкан

10 В305. Графическое дифференцирование с помощью зеркальной линейки. Kunze G. Die grafische Differentiation mit Hilfe des Spiegellineales. «Maschinenbau», 1960, **9**, № 12, 370—372 (нем.)

На примерах построений графика скорость — время по данному графику путь — время и графика ускорений по построенному графику скоростей популярно описывается способ графического дифференцирования для лиц, знающих механику лишь в объеме школьного курса физики. Нахождение направлений касательных, с которым связано построение производных кривых, рекомендуется осуществлять при помощи металлической зеркальной линейки. Рассмотрены числовые примеры.

А. Б. Штыкан

10 В306. Графические способы нахождения некоторых определенных интегралов, встречающихся в технических расчетах. Запольский Н. Н. «Научн. зап. Одесск. политехн. ин-т», 1960, **27**, 59—68

Дано описание известного метода Нейльса графического построения кривых $F(x) = y \cdot x^n$ (n — целое положительное число, $y = y(x)$ — данная кривая), планиметрирование которых равносильно механическому вычислению интегралов

$$\oint y \cdot x^n dx,$$

выражающих моменты плоских сечений. Далее предложены аналогичные способы графического построения кривых вида y/x, $y_1 \cdot y_2$, y_2/y_1 и рассмотрены примеры приложения описанных построений к решению некоторых конкретных задач технической механики. А. Б. Штыкан

10 В307. Приведение уравнений к каноническим формам уравнений IV номографического порядка с четырьмя переменными. Wojtowicz J. Sprowadzanie równań do postaci kanonicznych równania czwartego rzędu nomograficznego z czterema zmiennymi. «Zastosow. mat.», 1960, 5, № 3, 261—269 (польск.; рез. русск., англ.)

Выводятся необходимые и достаточные условия существования анаморфизирующей функции, приводящей уравнение вида

$$F(x, y, z, w) = 0$$

к одной из следующих форм:

$$f(x) + g(y) + h(z) + k(w) = 0;$$

$$f(x)g(y)h(z)k(w) - 1 = 0,$$

$$f(x) + g(y) + h(z)k(w) = 0.$$

Даются методы нахождения анаморфизирующей функции как интеграла дифференциального уравнения, интегрируемого в квадратурах, с указанием формы уравнения. Показано, что анаморфизирующая функция определена с точностью до постоянного коэффициента.

И. Ф. Шелихова

10 В308. Письмо в редакцию (по поводу статьи Т. Е. Джемс-Леви «К проблеме общей анаморфозы»). Вайнштейн И., Крейнес М. «Докл. АН СССР», 1961, **136**, № 4, 760

10 В309. Письмо в редакцию. Чекмарев Т. В. «Изв. высш. учебн. заведений. Математика», 1961, № 2, 178

10 В310. Новый универсальный номографический метод определения от трех до девяти переменных. Номограммы с перекрещивающимися индексами. Štěpánský Václav. Nová universální nomografická zobrazovací metoda pro vztahy od tří do devíti proměnných. Nomogramy se zkříženými indexy. «Sb. vědec. prací Vysoké školy báňské Ostravě», 1960, **6**, № 5-6, 673—689 (чешск.; рез. русск., нем., англ.)

10 В311. Геометрические исследования номограмм для эллиптических интегралов первого рода и эллиптических функций Якоби. I. Reutter F. Geometrische Untersuchungen über Nomogramme für elliptische Integrale erster Gattung und Jacobische elliptische Funktionen. I. «Z. angew. Math. und Mech.», 1960, **40**, № 10-11, 433—448 (нем.; рез. англ., русск.)

Рассмотренная недавно в этом журнале теория представления систем функций при помощи номограмм применяется к функциям комплексного аргумента. В частности, устанавливаются номограммы для отыскания значений эллиптических функций и эллиптических интегралов. Подробно рассматриваются их геометрическое строение и вопрос наиболее целесообразного их вида.

Резюме автора

10 В312. Геометрические исследования номограмм для эллиптических интегралов первого рода и эллиптических функций Якоби. II. Reutter F. Geometrische Untersuchungen über Nomogramme für elliptische Integrale erster Gattung und Jacobische elliptische Funktionen. II. «Z. angew. Math. und Mech.», 1960, **40**, № 12, 529—541 (нем.; рез. англ., русск.)

В работе, являющейся продолжением первой части (реф. 10В311) рассматривается, в частности, вопрос построения наиболее целесообразного вида номограмм для эллиптических функций. Резюме автора

10 В313. Геометрическое представление γ-функции Вейерштрасса. Reutter R. Geometrische Darstellung der Weierstraßschen γ-Funktion. «Z. angew. Math. und Mech.», 1961, **41**, № 1-2, 54—65 (нем.; рез. англ., русск.)

Статья примыкает к более ранним работам автора о номографической представимости эллиптических функций. Разрабатываются номограммы, при помощи которых можно вычислять натуральные логарифмы γ-функции Вейерштрасса с комплексным аргументом $z=x+iy$ и любые вещественные инварианты g_2, g_3. Оказывается, что при представлении посредством номограммы с выравненными точками шкалы для x и y лежат на конических сечениях, в то время как шкала для зависимой переменной лежит на прямой. Определение конического сечения, соответствующего данным g_2, g_3 и надлежащего коэффициента градуировки, производится при помощи семейства парабол Нейля. Резюме автора

10 В314 К. Опыт расчета плоских и осесимметричных сверхзвуковых течений газа методом характеристик. Кацкова О. М., Наумова И. Н., Шмыглевский Ю. Д., Шулишнина Н. П. М., Вычисл. центр. АН СССР, 1961, 60 стр., илл., 17 к.

Излагается опыт Вычислительного центра АН СССР по расчету осесимметричных сверхзвуковых течений газа методом характеристик. Подробно описывается метод расчета вихревых течений и течений с ударными волнами в случае обтекания тел вращения невозмущенным потоком газа. Приводятся примеры расчетов.

М. К. Керимов

10 В315 К. Введение в практические вычислительные методы. Приобретение навыков в области округления, сокращения, методы сокращенных вычислений, интерполяция, вспомогательные вычисления, вычислительные машины. Harkink F. Inleiding tot het praktisch rekenen. Cijfervaardigheid, het afronden en afbreken van getallen, verkorte bewerkingen, interpolatie, rekenhulpmiddelen, het rekenen met een machine, rekenautomaten. 3e dr. Groningen, P. Noordhoff, 1960. vii, 273 blz., ill., 9.75 fl. «Nieuwe uitgaven Nederl.», 1961, **22**, № 12, 183 (гол.)

10 В316 К. Границы численной математики. Ed. Langer Rudolph E. Frontiers of numerical mathematics. (Sympos., Madison, Wisc. Oct. 30th—31st, 1959). Madison, Univ. Wisconsin Press, 1960, xii, 132 pp., 3.50 doll. (англ.)

Приведено восемь статей, написанных разными авторами из пограничной между вычислительной математикой и другими науками области. Среди них работы под названием: «Некоторые математические задачи ядерных реакторов», «Численные задачи современной небесной механики», «О применении численных методов для решения систем дифференциальных уравнений с частными производными, возникающих в метеорологии», «Магнитная гидродинамика».

10 В317 К. Эффективный метод построения номограмм для произведения степенных функций. Хованский Г. С. М. Вычисл. центр АН СССР, 1959, 24 стр., илл., прилож. илл., 7 р. 5 к.

Предлагается новый метод номографирования формул вида

$$x = x_0 a_1^{b_1} a_2^{b_2} \ldots a_n^{b_n},$$

где x_0, b_1, b_2, ..., b_n — постоянные числа. В отличие от других существующих методов, этот метод дает возможность свести вычислительную и графическую работу по построению номограммы до минимума. Расчетная часть сводится лишь к вычислению одного коэффициента, а графическая часть — к нанесению фиксированной точки, проведению нескольких прямых линий (немых шкал) и оформлению надписей. Приведены две основные номограммы, которые играют роль специальной функциональной бумаги. В приложении приведено по 10 экземпляров основных номограмм. Основные номограммы можно также использовать для подбора параметров эмпирических формул степенного типа. М. К. Керимов

10 В318 К. Номограмма для гидравлического расчета каналов трапецеидального, круглого и параболиче-

ского профиля. Хованский Г. С. М., Вычисл. центр. АН СССР, 23 стр., илл., прилож. илл., 1 р. 80 к.

Предлагается номограмма с ориентированным транспарантом, которая дает возможность решать разнообразные задачи по гидравлическому расчету каналов трапецеидального, круглого и параболического профиля в широких пределах изменения переменных. Погрешность определения величин по номограммам составляет 2—3%. М. К. Керимов

10 В319 К. Вычислительные методы линейной алгебры. Фаддеев Д. К., Фаддеева В. Н. М., Физматгиз, 1960, 656 стр., илл., 22 р. 5 к.

Излагаются вычислительные методы для решения основных задач линейной алгебры. Часть материала, вошедшего в книгу, была изложена в книге В. Н. Фаддеевой под тем же названием. Книга состоит из девяти глав и дополнения. Расположение материала по главам следующее.

В гл. I излагаются основные сведения из теории матриц, вводится понятие линейного пространства и подпространства. Рассматриваются линейные операторы, собственные векторы и собственные значения оператора. Вводится понятие предела в линейной алгебре и градиента функционала.

Гл. II посвящена следующим задачам: решение линейной неоднородной алгебраической системы уравнений, обращение матрицы и задача исключения. Вводится понятие плохо обусловленных матриц и приводятся выражения для чисел обусловленности. Излагается метод Гаусса для решения системы уравнений (схема единственного деления) и модификация этого метода, при котором используются элементарные матрицы вращений и матрицы отражений от $(n-1)$-мерной плоскости. Дается обобщение метода исключения из системы, матрицы которых разбиты на клетки с квадратными диагональными клетками. Рассматриваются схема единственного деления с исключением по строкам и по столбцам для вычисления определителей и компактная схема для решения линейных систем, а также метод квадратных корней для решения систем с симметричной матрицей, метод окаймления, эскалаторный метод (в применении к системам с симметричной матрицей) и метод Перселла. Для обращения матрицы приведены методы: схема единственного деления, компактная схема, обращение при помощи разбиения матрицы на клетки, метод окаймления, метод пополнения, основанный на идее постепенного изменения обращаемой матрицы с внесением последовательно поправок к элементам обратной матрицы. Рассматривается решение задачи исключения, состоящей в вычислении значения линейной формы $\sum_{i=1}^{n} c_i x_i$, где c_i — данные числа, x_i — решение системы $Ax=F$, и применение этого метода к решению систем уравнений и к обращению матриц. Приводится итерационный процесс для исправления элементов обратной матрицы.

В гл. III описываются общие принципы построения итерационных процессов, рассматривается простейший итерационный процесс — метод последовательных приближений и координатные релаксационные методы. Приводится необходимое и достаточное условие, а также ряд достаточных признаков сходимости метода последовательных приближений. Описывается одношаговый циклический процесс (метод Зейделя) и достаточные условия его сходимости, а также модификация этого метода и достаточные условия его сходимости. Излагаются методы полной и неполной релаксации для систем с положительно определенными матрицами, методы релаксации по длине вектора невязки и групповой релаксации. Доказана теорема сходимости процесса полной и неполной релаксации. Проведено исследование быстроты сходимости метода простой итерации и циклического релаксационного метода с постоянным множителем, а также метода релаксации для систем с положительно определенными квазитрехдиагональными матрицами.

Гл. IV посвящена изложению точных методов нахождения всех собственных значений матрицы и соответствующих собственных векторов. Рассматриваются главным образом матрицы с вещественными элементами. Излагаются: метод А. Н. Крылова; метод Хессенберга и метод Самуэльсона, являющиеся близкими к методу Крылова; метод А. М. Данилевского; метод Леверье; видоизменение метода Леверье, предложенное Д. К. Фаддеевым, которое, кроме упрощений при вычислении коэффициентов характеристического полинома, позволяет определять обратную матрицу и собственные векторы матрицы; эскалаторный метод, основанный на использовании свойств ортогональности собственных векторов матрицы и ее транспонированной. Здесь же излагается метод интерполяции и частично метод ортогонализации последовательных итераций, который в применении к симметричной матрице носит название метода минимальных итераций. Рассматриваются вопросы устойчивости и уточнения полной проблемы собственных значений, а также преобразования симметричной матрицы к трехдиагональному виду посредством вращений, вычисление характеристического полинома трехдиагональной матрицы, определение собственных значений этой матрицы и вычисление двух собственных векторов, принадлежащих наибольшему и наименьшему собственным значениям.

Гл. V посвящена изложению методов определения одного или нескольких собственных значений и собственных векторов матрицы A. Прежде всего рассматривается степенной метод, позволяющий вычислять наибольшее по модулю собственное значение и принадлежащий ему собственный вектор и являющийся простейшим итерационным процессом для решения частичной проблемы о собственных значениях. Рассматривается несколько частных случаев: а) наибольшее по модулю собственное значение вещественное и простое; б) наибольшие по модулю собственные значения образуют простую комплексную пару и др. Описаны два приема (скалярное произведение, δ^2-процесс) ускорения сходимости степенного метода в случае вещественного собственного значения, а также его модификации (степенной метод со сдвигом, возведение матрицы в степень). Излагается ступенчатый степенной метод применительно к задаче определения, главным образом, двух наибольших по модулю собственных значений и соответствующих собственных векторов. При этом рассматриваются три разновидности метода: вполне стабилизирующий ступенчатый метод, ступенчатые итерации Бауэра и нестабилизирующиеся итерации. Излагаются, кроме того, метод λ-разности и методы исчерпывания и понижения. Методы исчерпывания и понижения дают возможность, в частности, решить полную проблему собственных значений при помощи цепочки решений частичных проблем. Вкратце рассматриваются методы, аналогичные методам координатной релаксации (простой и групповой), применимые к симметричным матрицам. Рассматриваются также методы уточнения отдельного собственного значения и принадлежащего ему собственного вектора. Это метод Дервидюэ, метод Виландта, являющийся видоизменением степенного метода, и метод возмущений.

В гл. VI излагаются точные методы, применимые к решению систем линейных уравнений и к решению полной и частичной проблемы собственных значений. Здесь рассматривается метод минимальных итераций, суть которого заключается в построении системы базисных векторов и на их основе ортогональных полиномов. При этом предполагается, что матрица симметрична. Излагается биортогональный алгорифм, который можно

рассматривать как обобщение метода минимальных итераций на случай несимметричной матрицы. Знание базиса позволяет найти решение линейной системы $Ax=F$, а использование базиса и системы ортогональных полиномов дает собственные значения и собственные векторы матрицы A. Приводится метод A-минимальных итераций, в котором система базисных векторов строится в процессе A-ортогонализации в предположении положительной определенности матрицы A, а также A-биортогональный алгорифм, сущность которого заключается в построении пары сопряженных базисов. Приведены двучленные формулы метода минимальных итераций и биортогонального алгорифма и некоторые другие методы сопряженных направлений.

В гл. VII рассматриваются итерационные методы, пригодные для решения систем линейных уравнений и решения частичной проблемы собственных значений в случае положительно определенной матрицы. Эти методы основаны на идее релаксации, причем векторами, в направлении которых осуществляется минимизация выбранного функционала, являются градиенты функционала. В частности, изложены одношаговые методы — метод наискорейшего спуска, градиентный метод с минимальными невязками и градиентные методы с неполной релаксацией, а также многошаговые градиентные методы наискорейшего спуска в применении к решению линейных систем. Исследуется скорость сходимости этих методов. Изложен ряд градиентных методов для нахождения максимального и минимального собственных значений и соответствующих собственных векторов, в том числе метод постоянного множителя, метод наискорейшего спуска, степенной метод и др., а также метод полиномов Ланцоша для нахождения фиксированного числа собственных значений и собственных векторов.

В гл. VIII описываются итерационные методы для определения всех собственных значений матрицы. В частности, приводится алгорифм деления и вычитания, который позволяет определять собственные значения матрицы как пределы последовательности некоторых чисел, получающихся по рекуррентным формулам. Начальными данными служат коэффициенты двучленной формы биортогонального алгорифма. Излагается треугольный степенной метод, являющийся обобщением ступенчатого степенного метода, и треугольный степенной метод со сдвигом. Рассматриваются LR-алгорифм, заключающийся в построении двух последовательностей $A=L_1R_1$, $R_lL_l=L_{l+1}R_{l+1}$, где L_l — матрицы с единичными диагональными элементами, и AP-алгорифм, вычислительная схема которого близка к вычислительной схеме LR-алгорифма. Описаны итерационные процессы, основанные на применении вращений. Эти процессы для симметричных матриц состоят в цепочке преобразований подобия, в результате которых в пределе получается диагональная матрица и собственные значения определяются непосредственно (метод Якоби). Излагается метод Ланцоша определения всех собственных значений при помощи спектрального анализа последовательных итераций.

Гл. IX посвящена изложению теории и описанию вычислительных схем так называемых универсальных алгорифмов в применении к задаче решения системы уравнений $Ax=F$. Под универсальным алгорифмом подразумевается итерационный процесс вида $X^{(k+1)}=X^{(k)}+h^{(k)}(A)[F-AX^{(k)}]$, в котором последовательность полиномов $h^{(k)}(t)$ строится раз и навсегда для обширного класса матриц с заданным расположением собственных значений. Простейшим универсальным алгорифмом является алгорифм, в котором $h^{(k)}(t)=h=\text{const}$. Основным принципом построения универсальных алгорифмов является идея «подавления компонент». Излагается два критерия выбора универсального полинома $g(t)=1-th(t)$. Описываются универсальные алгорифмы, наилучшие в смысле первого и второго критериев. Излагаются приемы Л. А. Люстерника и А. А. Абрамова для ускорения сходимости метода последовательных приближений при решении системы уравнений $x=Bx+G$, а также излагаются «BT-процессы», обобщающие процесс Абрамова. Рассматриваются общие трехчленные универсальные итерационные процессы, универсальный алгорифм Ланцоша и универсальные алгорифмы, наилучшие в среднем. Кроме того, рассматризается применение конформного отображения к решению линейных систем и к решению частичной проблемы собственных значений. В дополнении излагается итерационный процесс для решения полной проблемы собственных значений, предложенный В. Н. Кублановской. Приведена обширная библиография.

Д. Ф. Давиденко

ТАБЛИЦЫ

10 В320. Таблицы ортогональных полиномов для случая, когда независимая переменная x изменяется по закону геометрической прогрессии $x_r=2^{r-2}$; $x_1=0$; $x_r=2^{r-1}$; $x_1=1$. Singh Daljit. Tables of orthogonal polynomials when the independent variable 'x' is in the geometric progression: $x_r=2^{r-2}$; $x_1=0$; $x_r=2^{r-1}$; $x_1=1$. «J. Indian Soc. Agric. Statist.», 1958, **10**, № 1-2, 131—140 (англ.)

Рассматривается разложение функций по ортогональным полиномам

$$y=b_0Z_0+b_1Z_1+\ldots, \qquad (1)$$

где $Z_p=Z_p(x)$ — полином степени p; $\sum Z_pZ_q=0$, $(p\neq q)$; $Z_0=1$. Коэффициенты b_p в разложении (1) определяются по следующей формуле:

$$b_p=\frac{L\sum_i^n y_iZ_p'(x_i)}{\sum_i^n Z_p'^2(x_i)}, \qquad (2)$$

где $y_i=y(x_i)$; $Z_p'=LZ_p$; L — постоянная, зависящая от p и n. Приводятся таблицы значений величин, необходимых для вычисления коэффициентов b_p с помощью формулы (2). Все значения даны для случая, когда x меняется по закону геометрической прогрессии; $x_r=2^{r-2}$; $x_1=0$; $x_r=2^{r-1}$; $x_1=1$. Указано, что такие случаи нередко встречаются в биологии, агрономии и некоторых других науках.

Ю. М. Барабошкин

10 В321. Минимаксные методы для составления таблиц. Fox Leslie. Minimax methods in table construction. «On Numerical Approximat. Madison, Univ. Wisconsin Press», 1959, 233—244 (англ.)

Приводится сжатое изложение методов, разработанных (в основном самим автором и другими английскими специалистами) для построения математических таблиц. Описываются методы интерполирования, применение полиномов Чебышева для интерполирования, приводятся новые интерполяционные формулы, наиболее удобные при построении таблиц (формулы Бесселя—Чебышева, Эверетта—Бесселя—Чебышева, Эверетта Чебышева) и др.

М. К. Керимов

10 В322. Вспомогательные интегралы для структурных сумм. Maradudin A. A., Weiss G. H. Auxiliary integrals for lattice sums. «J. Chem. Phys.», 1959, **31**, № 5, 1433 (англ.)

В различных областях физики встречаются интегралы вида

$$\Phi_n(x)=\int_1^\infty t^ne^{-xt}\,dt, \qquad (1)$$

где n — целое число или половина нечетного целого числа. В частности, когда n — половина нечетного целого, интеграл (1) встречается при вычислении структурных сумм. В заметке сообщается о составлении таблиц интеграла (1) для x=0,2 (0,2) 20 и n = 0,5 (1) 12,5. Для вычисления интеграл (1) преобразовывается к виду

$$\Phi(x) = (e^{-x}/x^{n+1}) \int_0^\infty (v+x)^n e^{-v}\, dv$$

и применяется 15-точечная квадратурная формула Лагерра. Число знаков в табличных значениях не указывается, хотя говорится, что ошибка не превосходит единицы последнего разряда. М. К. Керимов

10 В323. Таблицы кумулятивных функций распределений для выборок из симметрично усеченных нормальных распределений. Aggarwal Om P., Guttman Irwin. Tables of the cumulative distribution functions of samples from symmetrically truncated normal distributions. «Ann. Inst. Statist. Math.», 1959, **11**, № 1, 55—68 (англ.)

Рассматривается случайная величина Z с плотностью распределения

$$f(z) = \begin{cases} \dfrac{c}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\dfrac{z^2}{2}\right) & \text{при } |z| < a, \\ 0 & \text{при всех других значениях.} \end{cases}$$

Пусть $Z_1, Z_2, \ldots, Z_n$ — независимые наблюденные значения Z, а $f_n(\bar{z})$ — плотность распределения для $\bar{Z} = n^{-1}\sum_{i=1}^{n} Z_i$. Плотность распределения для $\bar{Z}$ имеет вид:

$$f_1(\bar{Z}) = \begin{cases} \dfrac{c}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\dfrac{\bar{Z}^2}{2}\right) & \text{при } |\bar{Z}| < a, \\ 0 & \text{при всех других значениях } \bar{Z}, \end{cases}$$

и аналогичные формулы для n = 2, 3, 4. В работе приводятся таблицы с пятью значащими цифрами для функций

$$\Phi_i(t) = \int_0^t f_i(x)\, dx, \quad i = 1, 2, 3, 4$$

при a = 1 (0,5) 3, t = 0, 01 до соответствующего значения a (например, при a = 1 t меняется в пределах 0,1 до 1). При составлении таблиц была использована приближенная формула

$$\int_{x_0}^{x_1} y\, dx = \frac{h}{24}\left[-y_{-1} + 13y_0 + 13y_1 - y_2\right] + \frac{11 y^{(5)}(\xi) h^5}{720}, \text{ где } x_0 < \xi < x_1.$$

М. К. Керимов

10 В324. Таблица значений функции $W=Z/(1+Z)$ для комплексных чисел. Holberg Karl, Jensen Jens R. Table of $W=Z/(1+Z)$ for complex numbers. «Acta polytechn. scand. Math. and Comput. Mach. Ser.», 1959, № 3, iv, 144 pp., ill. (англ.)

При конструировании систем автоматического управления часто приходится пользоваться таблицами функций

$$W = \frac{Z}{1+Z} \quad \text{или} \quad V = \frac{1}{1+U},$$

когда Z и U являются комплексными переменными. Как правило, на практике вместо таблиц пользовались специальной номограммой, называемой картой Никольса. В книге приводятся численные значения функции W (значения логарифма модуля W, умноженного на 20, т. е. $20\log|W|$, и значения $\arg W$) при $-22{,}0 \leqslant 20\log|Z| \leqslant 26{,}0$ с шагом h = 0,2 и $-178° \leqslant \arg Z \leqslant 0°$ с шагом $\varphi = 2°$. Кроме того, таблицы дают возможность вычислять значения функции V, так как при $U = \frac{1}{Z}$ имеем

$$V(U) = V\left(\frac{1}{Z}\right) = \frac{Z}{1+Z} = W(Z).$$

Для значений, выходящих за пределы указанных выше промежутков, рекомендуется пользоваться приближенными формулами: при $20\log|Z| > 26$ формулами

$$20\log|W| \approx -8{,}7\frac{\cos(\arg Z)}{|Z|},$$

$$\arg W \approx 57\frac{\sin(\arg Z)}{|Z|};$$

при $20\log|Z| < -22$ формулами

$$20\log|W| \approx 20\log|Z| - 8{,}7|Z|\cos(\arg Z),$$

$$\arg|W| \approx (\arg Z) - 57|Z|\sin(\arg Z).$$

В начале книги приведена также карта Никольса. Таблицы сосчитаны на цифровой машине Норвежского научного центра (Norwegian Defence Research Establishment). М. К. Керимов

10 В325. Шестизначные таблицы функции Пуассона. Hochsteiner Otto. Sechsstellige Tafeln der Poissonfunktion. «Wiss. Z. Hochschule Verkehrswesen Dresden», 1958—1959, **6**, № 3, 569—577 (нем.; рез. русск., англ., франц.)

Как известно из теории вероятностей, вероятность попадания ровно m точек в отрезок длины l выражается формулой

$$P(m) = \frac{(\lambda l)^m}{m!} e^{\lambda l},$$

где λ — математическое ожидание числа точек, приходящихся на единицу длины. Обозначая $\lambda l = a$ (математическое ожидание числа точек, попадающих на участок), можно получить распределение Пуассона

$$P(m) = \frac{a^m}{m!} e^{-a},$$

которое зависит от одного параметра a. Приводятся следующие таблицы. Таблица I содержит значения функции $10^6 \cdot e^{-a} \cdot a^m/m!$ с шестью значащими цифрами при a = 0,1 (0,1) 0,9 и m = 0 (1) 8, при a = 1 (1) 30 и m = 0 (1) 17, при a = 5 (1) 30 и n = 18 (1) 35. Таблица II содержит значения сумм $10^6 \cdot e^{-a}\sum \frac{a^m}{m!}$ при a = 0,1 (0,1) 0,9 и m = 0 (1) 8, при a = 1 (1) 30 и m = 0 (1) 17, при a = 4 (1) 30 и m = 18 (1) 35, при a = 15 (1) 30 и m = 36 (1) 53, при a = 26 (1) 30 и m = 54 (1) 61. М. К. Керимов

10 В326. Таблицы мономиально-мономиальных симметрических функций. Levine Jack. Monomial-monomial symmetric function tables. «Biometrika», 1959, **46**, № 1-2, 205—213 (англ.)

Произведения мономиальных симметрических функций (полиномы многих переменных) представляются как линейные функции от мономиальных функций и табулируются включительно до веса w=8. Отмечаются возможные теоретико-вероятностные использования таблиц. В. Н. Сачков

10 В327. Таблицы коэффициентов кратной интерполяции. Salzer H. E. Tables of osculatory interpolation coefficients. Nat. Bur. Standards. Appl. Math. Ser., 1959, № 56, 25 pp. (англ.)

Если известны значения функций $f(x)$ и ее первой производной $f'(x)$ в n точках через равные интервалы

длины h, то наиболее точной оказывается следующая интерполяционная формула:

$$f(x_0+ph)=\sum_{i=-[(n-1)/2]}^{[n/2]}\left\{L_i^{(n)}(p)\right\}^2\left\{1-2L_i^{(n)\prime}(i)(p-i)\right\}f_i+$$

$$+\sum_{i=-[(n-1)/2]}^{[n/2]}\left\{L_i^{(n)}(p)\right\}^2(p-i)\,hf_i'+R_{2n}(p),$$

где $x=x_0+ph$, $x_i=x_0+ih$, $f_i\equiv f(x_i)$, $f_i'\equiv f'(x_i)$, $[m]$ обозначает наибольшее целое число, не превышающее m,

$$L_i^{(n)}(p)=\prod_{j=-[(n-1)/2],\ j\neq i}^{[n/2]}\{(p-j)/(i-j)\},$$

$$R_{2n}(p)=f^{(2n)}(\xi)\,h^{2n}\left\{\prod_{j=-[(n-1)/2]}^{[n/2]}(p-j)\right\}^2/(2n)!$$

$$x_{-[(n-1)/2]}\leqslant\xi\leqslant x_{[n/2]}.$$

Формула (1) точна для всех многочленов $f(x)$ порядка $\leqslant 2n-1$. Переписывается (1) в виде

$$f(x_0+ph)\sim\sum_{i=-[(n-1)/2]}^{[n/2]}\{A_i(p)\,f_i+B_i(p)\,hf_i'\},$$

автор вычисляет значения коэффициентов $A_i(p)$ и $B_i(p)$ при $n=2, 3, 4, 5$. Приведены следующие таблицы.

I. Двухточечная формула ($n=2$):

$$f(x_0+ph)\sim A_0(p)\,f(x_0)+A_1(p)\,f(x_1)+$$
$$+h\,[B_0(p)\,f'(x_0)+B_1(p)\,f'(x_1)],$$

$p=0\,(0,1)\,1$, табличные значения для A_0, A_1, B_0, B_1, точные, ошибка $<0{,}0026\,|\,h^4f^{(4)}(\xi)\,|$.

II. Трехточечная формула ($n=3$):

$$f(x_0+ph)\sim A_{-1}(p)\,f(x_{-1})+A_0(p)\,f(x_0)+A_1(p)\,f(x_1)+$$
$$+h\,[B_{-1}(p)\,f'(x_{-1})+B_0(p)\,f'(x_0)+B_1(p)\,f'(x_1)],$$

$p=-1\,(0{,}01)\,1$ табличные значения для A_{-1}, A_0, A_1, B_{-1}, B_0, B_1 — точные, | ошибка | $<0{,}00021\,|\,h^6f^{(6)}(\xi)\,|$.

III. Четырехточечная формула ($n=4$):

$$f(x_0+ph)\sim A_{-1}(p)\,f(x_{-1})+A_0(p)\,f(x_0)+A_1(p)\,f(x_1)+$$
$$+A_2(p)\,f(x_2)+h\,[B_{-1}(p)\,f'(x_{-1})+B_0(p)\,f'(x_0)+$$
$$+B_1(p)\,f'(x_1)+B_2(p)\,f'(x_2)],$$

$p=-1\,(0{,}01)\,2$, табличные значения для A_{-1}, A_0, A_1, A_2, B_{-1}, B_0, B_1, B_2 вычислены с девятью десятичными знаками,

$$|\text{ошибка}|<\begin{cases}0{,}0000082\,|\,h^8f^{(8)}(\xi)\,|, & 0<p<1\\ 0{,}000025\,|\,h^8f^{(8)}(\xi)\,|, & -1<p<0,\ \text{или}\ 1<p<2.\end{cases}$$

IV. Пятиточечная формула ($n=5$):

$$f(x_0+ph)\sim A_{-2}(p)\,f(x_{-2})+A_{-1}(p)\,f(x_{-1})+A_0(p)f(x_0)+$$
$$+A_1(p)\,f(x_1)+A_2(p)\,f(x_2)+h\,[B_{-2}(p)\,f'(x_{-2})+$$
$$+B_{-1}(p)\,f'(x_{-1})+B_0(p)\,f'(x_0)+B_1(p)\,f'(x_1)+B_2(p)f'(x_2),$$

$p=-2\,(0{,}01)\,2$, табличные значения для A_{-2}, A_{-1}, A_0, A_1, A_2, B_{-2}, B_{-1}, B_0, B_1, B_2 вычислены с девятью десятичными знаками,

$$|\text{ошибка}|<\begin{cases}0{,}00000057\,|\,h^{10}f^{(10)}(\xi)\,|, & 0<|p|<1\\ 0{,}0000038\,|h^{10}f^{(10)}(\xi)\,|, & 1<|p|<2.\end{cases}$$

М. К. Керимов

10 В328. Коэффициенты и корни полиномов, которые входят в производные функции $exp(-\varepsilon/T)$. Campbell Edwin S., Fishbach E. M., Hirschfelder J. O. Coefficients and roots of the polynomials which define the derivatives of the exponential of $(-\varepsilon/T)$. «Math. Tables and Other Aids Comput.», 1958, 12, № 61, 1—17 (англ.)

Производная n-го порядка функции $\exp(-\varepsilon/T)$ имеет вид

$$\frac{d^n}{dT^n}\exp[-\varepsilon/T]=T^{-n}\exp[-\varepsilon/T]\,W_n[\varepsilon/T],$$

где

$$W_n[\varepsilon/T]=\sum_{l=1}^{n}b_{n,l}\,[\varepsilon/T]^l.$$

Постоянные $b_{n,l}$ являются коэффициентами однородного многочлена n-го порядка относительно $[\varepsilon/T]$. Полиномы W_n связаны с полиномами Лагерра $L_n[\varepsilon/T]$ при помощи соотношения

$$W_n[\varepsilon/T]=(-1)^n\{L_n[\varepsilon/T]-nL_{n-1}[\varepsilon/T]\}.$$

В некоторых физических задачах требуется знание коэффициентов $b_{n,l}$ и корней $r_{n,l}$ полинома W_n. В таблице I приводятся не равные нулю точные цифры коэффициентов $b_{n,l}$, вычисленные по формулам

$$b_{n,1}=(-1)^{n-1}n!,$$
$$b_{n,l}=-(n+l-1)\,b_{n-1,l}+b_{n-1,l-1}\ (2\leqslant l\leqslant n-1),$$
$$b_{n,n}=1$$

и проверенные при помощи соотношения

$$(n-l)\,b_{n,l}=-n(n-1)\,b_{n-1,l};$$

причем n и l меняются в следующих пределах: $n=1; 2; 3; 4; 5; 6; 7, \ldots; 30$, $l=1;\ 1-2;\ 1-3;\ 1-4;\ 1-5;\ 1-6;\ 1-7, \ldots, 1-30$. Приводятся значения величин $\beta_{n,l}$ и $P_{n,l}$, связанных с $W_n(x)$ и $b_{n,l}$ соотношением

$$W_n(x)=\sum_{l=1}^{n}b_{n,l}\,x^l,\quad b_{n,l}=\beta_{n,l}\cdot10^{P_{n,l}},\quad 1\leqslant\beta_{n,l}<10.$$

В таблице II приводятся значения корней $r_{n,l}$ полинома $W_n(\varepsilon/T)$ с четырнадцатью десятичными знаками при $n=2; 3; 4; \ldots; 30$, $l=1;\ 1-2;\ 1-3; \ldots; 1-29$.

М. К. Керимов

10 В329. О тороидальных функциях. Loh S. C. On toroidal functions. «Canad. J. Phys.», 1959, 37, № 5, 619—635 (англ.)

Уравнение Лапласа в трехмерном пространстве в тороидальных координатах (k, v, ω) имеет вид

$$\frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{\operatorname{sh}u}{\operatorname{ch}u-\cos v}\frac{\partial\varphi}{\partial u}\right)+\frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{\operatorname{sh}u}{\operatorname{ch}u-\cos v}\frac{\partial\varphi}{\partial v}\right)+$$
$$+\frac{1}{(\operatorname{ch}u-\cos v)\operatorname{sh}u}\frac{\partial^2\varphi}{\partial\omega^2}=0$$

или

$$\frac{\partial^2\psi}{\partial u^2}+\frac{\partial^2\psi}{\partial v^2}+\frac{1}{\operatorname{sh}^2u}\frac{\partial^2\psi}{\partial\omega^2}+\operatorname{ch}u\frac{\partial\psi}{\partial u}+\frac{1}{4}\psi=0,\quad(1)$$

где $\varphi=\psi\sqrt{(\operatorname{ch}u-\cos v)}$. Ищем решение (1) в виде $\psi=U(u)\,V(v)\,W(\omega)$; тогда для определения U, V и W получаем уравнения

$$\frac{d^2W}{d\omega^2}+m^2W=0,\qquad\frac{d^2V}{dv^2}+n^2V=0,$$

$$\frac{d^2U}{du^2}+\operatorname{cot h}u\frac{dU}{du}-\left(n^2-\frac{1}{4}+\frac{m^2}{\operatorname{sn}^2u}\right)U=0,$$

из которых находим
$W = a_m \cos mw + b_m \sin mw$, $V = c_n \cos nv + d_m \sin nv$,

$$p_n^m(u) = \frac{1}{\pi} \frac{(-1)^m \Gamma\left(n+\frac{1}{2}\right)}{\Gamma\left(n-m+\frac{1}{2}\right)} \int_0^\pi \frac{\cos m\theta\, d\theta}{(\operatorname{ch} u + \operatorname{sh} u \cdot \cos\theta)^{n+\frac{1}{2}}},$$

$$q_n^m(u) = \frac{(-1)^m \Gamma\left(n+\frac{1}{2}\right)}{\Gamma\left(n-m+\frac{1}{2}\right)} \int_0^\infty \frac{\operatorname{ch} m\vartheta\, d\theta}{(\operatorname{ch} u + \operatorname{sh} u \operatorname{ch}\theta)^{n+\frac{1}{2}}},$$

где n и m — любые положительные целые числа, m не больше n (n может равняться нулю). Функции $p_n^m(u)$ и $g_n^m(u)$ называются соответственно присоединенными тороидальными функциями первого и второго родов порядков n и m. Для этих функций приводятся таблицы I и II при $n = 1(1)4$, $m = 1(1)4$, $u = 0,0(0,1)4,0$. Указывается связь тороидальных функций с присоединенными функциями Лежандра

$$p_n^m(u) = P_{n-\frac{1}{2}}^m(\operatorname{ch} u), \quad q_n^m(u) = Q_{n-\frac{1}{2}}^m(\operatorname{ch} u).$$

Для осесимметричного случая уравнение Лапласа принимает вид

$$\frac{\partial^2\psi}{\partial U^2} + \frac{\partial^2\psi}{\partial v^2} + \operatorname{cth} u \frac{\partial\psi}{\partial u} + \frac{1}{4}\psi = 0.$$

Полагая $\psi = F(u)\,G(v)$, получим уравнения для определения F и G. Таким образом получаем $G = \cos(nv + \alpha_n)$, а также функции $p_n(u)$ и $q_n(x)$, которые называются зональными тороидальными функциями первого и второго родов. Имеем

$$p_n(u) = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi \frac{d\theta}{(\operatorname{ch} u - \operatorname{sh} u \cos\theta)^{n+\frac{1}{2}}},$$

$$q_n(u) = \int_0^\infty \frac{d\theta}{(\operatorname{ch} u + \operatorname{sh} u \operatorname{ch}\theta)^{n+\frac{1}{2}}}.$$

В частности, при $n = 0$ и $n = 1$;

$$p_0(u) = 2^{-(u/2)} F(k), \quad p_1(u) = 2e^{u/2} E(u),$$

$$q_0(u) = 2e^{-(u/2)} F(k'), \quad q_1(u) = 2e^{u/2}[F(k') - E(k')],$$

где $k^2 = 1 - e^{-2u}$, $k'^2 = e^{-2u}$, F и E — полные эллиптические интегралы первого и второго родов. Используя рекуррентные соотношения

$$(2n+1)\,p_{n+1} - 4n \operatorname{ch} u\, p_n + (2n-1)\,p_{n-1} = 0,$$
$$(2n+1)\,q_{n+1} - 4n \operatorname{ch} u q_n + (2n-1)\,q_{n-1} = 0,$$

вычислены таблицы III и IV для $p_n^0(u)$ и $g_n^0(u)$ при $n = 0(1)4$, $u = 0(0,1)4,0$. Используя рекуррентные соотношения

$$p_n' = \frac{2n+1}{2\operatorname{sh} u}(p_{n+1} - \operatorname{ch} u\, p_n),$$

$$q_n'(u) = \frac{2n+1}{2\operatorname{sh} u}(q_{n+1} - \operatorname{ch} u q_n),$$

вычислены таблицы V и VI для $p_n'(u)$ и $g_n'(u)$ при $n = 0(1)4$, $u = 0(0,1)4.0$. Устанавливаются следующие приближенные формулы для $p_n(u)$ и $q_n(x)$: а) для малых u ($u < 1,0$) имеем

$$p_n(u) \approx \left(1 + \frac{4n^2-1}{16}u^2\right);$$

б) для больших u ($u > 1,5$) имеем

$$p_n(u) \approx \frac{2}{\pi} \frac{2.4.6\ldots(2n-2)}{3.5.7\ldots(2n-1)} e^{(n-\frac{1}{2})u},$$

$$q_n(u) = \pi \frac{1.3.5\ldots(2n-1)}{2.4.6\ldots 2n} e^{-(n+\frac{1}{2})u} \quad (\text{для } u > 2,0).$$

Все приведенные в работе таблицы вычислены с пятью значащими цифрами. М. К. Керимов

10 В330. О построении теоретических сейсмограмм в окрестности начальных точек. Смирнова Н. С., Ермилова Н. И., В сб. «Вопр. динамич. теории распростр. сейсмич. волн.». 3. Л., Ленингр. ун-т, 1959, 161—213

Излагается методика построения теоретических сейсмограмм отраженных и головных волн в окрестности начальной точки. Дается сводка расчетных формул и обсуждаются вопросы, касающиеся получения входящих в них вспомогательных функций. В приложениях 1 и 2 к работе приводятся таблицы. Сначала табулируются функции

$$I_1(a) = \int_{-\infty}^{\infty} \sqrt{\rho - a}\, e^{-\rho^2} d\rho, \quad I(a) = \int_a^\infty \sqrt{\rho - a}\, e^{-\rho^2} d\rho,$$

где $a = |a| e^{-\frac{\pi}{4} i}$, а ветвь радикала фиксирована условием $\arg\sqrt{\rho - a} = -\frac{5}{8}\pi$ при $\rho = 0$. Эти функции удовлетворяют уравнению $y''(a) + 2ay'(a) - y(a) = 0$ с начальными условиями

$$I_1(0) = -\frac{2}{3}\Gamma(1{,}75)(1+i), \quad I(0) = -\frac{2}{3}\Gamma(1{,}75),$$

$$I_1'(0) = \Gamma(1{,}25)(1-i), \quad I'(0) = \Gamma(1{,}25).$$

В таблице I приводятся значения функций $|I_1(a)|$, $|I(a)|$, а также функций $\psi_1(a) = \frac{5}{8}\pi + \arg I_1(a)$, $\psi(a) = -\frac{3}{8}\pi + a^2 + \arg I(a)$ с тремя десятичными знаками при $|a| = 0{,}00(0{,}01)1{,}00(0{,}10)5{,}00$. В таблице II приводятся значения функций

$$\Phi^+(\tau, r) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{-a_\omega(T) - ib_\omega(T)}{\omega} F_1 e^{i\omega\tau} d\omega,$$

$$\Psi^+(\tau, r) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{b_\omega(T) - ia_\omega(T)}{\omega} F_2 e^{i\omega\tau} d\omega,$$

где

$$F_1 = \begin{cases} \dfrac{|I_1(c\sqrt{\omega})|}{|\omega|^{1/4}} e^{i\psi_1(c\sqrt{\omega})}, & \omega > 0, \\ \dfrac{|I_1(c\sqrt{-\omega})|}{|\omega|^{1/4}} e^{-i\psi_1(c\sqrt{-\omega})}, & \omega < 0, \end{cases}$$

$$F_2 = \begin{cases} \dfrac{|I_1(c\sqrt{\omega})|}{|\omega|^{1/4}} e^{i\psi_1(c\sqrt{\omega})}, & \omega > 0, \\ -\dfrac{|I_1(c\sqrt{-\omega})|}{|\omega|^{1/4}} e^{-i\psi_1(c\sqrt{-\omega})}, & \omega < 0, \end{cases}$$

$a = c\sqrt{\omega}$ и аналогичных функций $\bar{\Phi}^+(\tau, r)$ и $\bar{\Psi}^+(\tau, r)$. Эти таблицы в основном содержат значения функций с четырьмя—пятью десятичными цифрами при переменном шаге. Функции Φ^+, Ψ^+, $\bar{\Phi}^+$, $\bar{\Psi}^+$ протабулин-

рованы для значений параметров: $\widetilde{c}=8;\ 1;\ 0{,}5;0{,}3;\ 0{,}2;\ 0{,}1;\ 0{,}01;\ 0;\ \widetilde{c}_\Gamma=8;\ 1;\ 0{,}3;\ 0{,}2;\ 0{,}1;\ 0;$ функции $[\Phi^+]$ и $[\Psi^+]$ — для значений параметров $\widetilde{c}=8;\ 1;\ 0{,}5;\ 0{,}2;\ 0{,}01;\ 0;$ функции $[\overline{\Phi}^+]$ и $[\overline{\Psi}^+]$ — для значений параметров $\widetilde{c}_\Gamma=8;\ 3;\ 1{,}5;\ 1;\ 0{,}75;\ 0{,}6;\ 0{,}3;\ 0{,}2;\ 0{,}1;\ 0{,}01;\ 0.$

М. К. Керимов

10 В331. Расширение таблиц Линдова для численного дифференцирования с использованием формул Ньютона—Стирлинга и Ньютона—Бесселя. Salzer Herbert E., Kimbro Genevieve M. Extension of Lindow's tables for numerical differentiation using Newton—Stirling and Newton—Bessel differences. «Math. Tables and Other Aids Comput.», 1958, 12, № 62, 133—140 (англ.)

Линдов (Lindow M., Numerische Infinitesimalrechnung, Berlin, Dümmler, 1928, 166—169) дал таблицы коэффициентов формул, полученных дифференцированием интерполяционных формул Ньютона—Стирлинга и Ньютона — Бесселя для численного нахождения первых и вторых производных в промежуточных точках. Авторы расширяют указанные таблицы. Приводятся следующие таблицы коэффициентов (все они вычислены с десятью значащими цифрами при $p=0(0{,}01)0{,}25$). Таблица I содержит значения коэффициентов Ньютона—Стирлинга, входящих в формулу для первой производной

$$f'(x_0+ph)=\frac{1}{h}\left\{\mu\delta_0 \pm p\delta_0^2 + A_3(p)\,\mu\delta_0^3 \pm A_4(p)\,\delta_0^4 + A_5(p)\,\mu\delta_0^5 \pm A_6(p)\,\delta_0^6 + A_7(p)\,\mu\delta_0^7 \pm A_8(p)\,\delta_0^8 + A_9(p)\,\mu\delta_0^9 \pm A_{10}(p)\,\delta_0^{10} + \ldots\right\},$$

Таблица II содержит значения коэффициентов Ньютона — Бесселя, входящих в формулу для первой производной

$$f'(x_0+ph)\equiv f'(x_0)\,\frac{h}{2} \pm p_1 h) = \frac{1}{h}\left\{\delta_{1/2} \pm p_1\,\mu\delta_{1/2}^2 + B_3(p_1)\,\delta_{1/2}^3 \pm B_4(p_1)\,\mu\delta_{1/2}^4 + B_5(p_1)\,\delta_{1/2}^5 \pm B_6(p_1)\,\mu\delta_{1/2}^6 + B_7(p_1)\,\delta_{1/2}^7 \pm B_8(p_1)\,\mu\delta_{1/2}^8 + B_9(p_1)\,\delta_{1/2}^9 \pm B_{10}(p_1)\,\mu\delta_{1/2}^{10} + \ldots\right\}.$$

Таблицы III и IV содержат значения тех же коэффициентов, входящих в следующие формулы для второй производной:

$$f''(x_0 \pm ph)=\frac{1}{h^2}\left\{\delta_0^2 \pm p\mu\delta_0^3 + C_4(p)\,\delta_0^4 \pm C_5(p)\,\mu\delta_0^5 + C_6(p)\,\delta_0^6 \pm C_7(p)\,\mu\delta_0^7 + C_8(p)\,\delta_0^8 \pm C_9(p)\,\mu\delta_0^9 + C_{10}(p)\,\delta_0^{10} \pm \ldots\right\},$$

$$f''(x_0+ph)\equiv f''\left(x_0+\frac{h}{2} \pm p_1 h\right)=\frac{1}{h^2}\left\{\mu\delta_{1/2}^2 \pm p\delta_{1/2}^3 + D_4(p_1)\,\mu\delta_{1/2}^4 \pm D_5(p_1)\,\delta_{1/2}^5 + D_6(p_1)\,\mu\delta_{1/2}^6 \pm D_7(p_1)\,\delta_{1/2}^7 + D_8(p_1)\,\mu\delta_{1/2}^8 \pm D_9(p_1)\,\delta_{1/2}^9 + D_{10}(p_1)\,\mu\delta_{1/2}^{10} \pm \ldots\right\}.$$

М. К. Керимов

10 В332 К. Новые таблицы для функций рассеяния Ми сферических частиц. VI. Полные коэффициенты рассеяния Ми с действительными значениями для коэффициента преломления. Penndorf Rudolf B. New tables of Mie scattering functions for spherical particles. VI. Total Mie scattering coefficients for real refractive indices. Geophys. Res. Papers, Air Force Cambridge Research Center, Bedford, Mass., 1956, № 45, ix, 98 pp. (англ.)

Книга составлена на основании многочисленных вычислений (произведенных на машине ИБМ-701) полных коэффициентов рассеяния Ми. Коэффициент K был вычислен для $\alpha=0(0{,}1)30$ при значениях коэффициента преломления $n=1{,}33;\ 1{,}40;\ 1{,}44;\ 1{,}686;\ 1{,}50$. Полученные значения имеют пять значащих цифр. Дополнительные вычисления на настольных машинах (с четырьмя значащими цифрами) были произведены для $n=1+\varepsilon;\ 2;\ \infty$. В книге излагается теория по данному вопросу и приводится библиография. Наконец, описывается один эмпирический метод для вычисления K с точностью до $\pm 3\%$ при любых α и n. John Todd.

Перевод. из Math. Revs. 1957, 18, № 10, 830.

10 В333 К. Справочник по математическим таблицам. Burunova N. M. A guide to mathematical tables (Supplement No. 1). Transl. from the Russ. Oxford—London—New York—Paris, Pergamon Press. 1960, xxxviii, 190 pp. (англ.)

Перевод с русского, см. РЖМат, 1960, 9661К.

10 В334 К. Математические таблицы для химиков и физиков. Hodgman Charles D. Mathematical tables from handbook of chemistry and physics. 11 th ed. Ed. Cleveland, Ohio, Chem. Rubber Publ. Co., 1959, x, 445 pp., ill. (англ.)

10 В335 К. Семизначные десятичные логарифмы. Rottmann Karl. Siebenstellige dekadische Logarithmen. Mannheim, Bibliogr. Inst., 1960, 194 S., 6.80 DM. «Dtsch. Nationalbibliogr.», 1961, A, № 5, 347 (нем.)

10 В336 К. Логарифмические числовые таблицы. Koschemann Otto. Logarithmen- und Zahlentafel. 25. durchges. Aufl. Neubearb Halberstadt Ernst. Frankfurt/M.—Berlin—Bonn, Diesterweg, 1961, 24 S., ill., 2.20 DM «Dtsch. Nationalbibliogr.», 1961, A, № 10, 772 (нем.)

10 В337 К. Таблица интегралов Френеля с шестью десятичными знаками. Pearcey T. Table of the Fresnel integral to six decimal places. New York, Cambridge Univ. Press, 1956, 63 pp., 2.50 doll. (англ.)

Пусть $C(u)+iS(u)=\int_0^x \exp(1/2i\pi t^2)\,dt$; пусть $u=(2x/\pi)^{1/2}$. Тогда C и S, как функции от x, табулированы в следующих пределах $x=0\,(0{,}001)\,1$ с семью десятичными знаками; $x=1\,(0{,}01)\,50$ с шестью десятичными знаками. Для всех табличных значений, исключая несколько первых, даны вторые центральные разности. Таблицы в основном были составлены при помощи субтабулирования до одной пятой, а затем до одной десятой (используя вычислительную машину National Type 300) по хорошо известным таблицам Ломмеля (ср. Watson G. N., Theory of Bessel functions, Cambridge, 1944, стр. 744), которые были проверены при помощи разностей, эти таблицы дают семь десятичных знаков для $x=0,\ 0{,}2\,(0{,}02)\,1$ и 6 десятичных знаков для $x=0{,}5\,(0{,}5)\,50$. Значения для малых x были получены при помощи разложений в ряд. Следует заметить, что ошибка редко достигает до одной единицы последнего знака. Имеется таблица поправок, позволяющая учесть влияние вторых разностей. Во введении упоминаются другие подобные таблицы (ссылки в основном взяты из журнала Math. Tables and Other Aids Comput.); наиболее свежие из этих таблиц изданы в 1953 г. в СССР (РЖМат, 1954, 5801К). Настоящие таблицы были составлены для их использования в дифракционных вычислениях с линейной интерполяцией на большом диапазоне. John Todd

Перевод из Math. Revs., 1957, 18, № 10, 829.

10 В338 К. Таблица квадратных корней комплексных чисел. Table of square roots of complex numbers (Rept.). Numer. Comput. Bur., No. 10. Tokyo, 1956, 21 pp. (англ.)

Квадратный корень комплексного числа $a+ib$ можно преобразовать так, чтобы он зависел только от квад-,

ратного корня числа $1+ix$ или $x+i$ при $0<x\leqslant 1$. Следовательно, настоящие таблицы позволяют находить U, V, u, v как функции от x по формулам

$$(1+xi)^{1/2}=U+V,\quad (x+i)^{1/2}=u+iv.$$

Таблицы составлены с одиннадцатью десятичными знаками для $x=0(0{,}002)1$. Приводятся также вторые разности. Таблицы изданы фотолитографическим способом. D. H. Lehmer

Перевод из Math. Revs, 1957, 18, № 5, 420—421

10 В339 К. Степени, корни, обратные величины в пределах от 0,0001 до 15000. Hof Hans. Powers, roots, reciprocals, from 0001—15000. 1st ed. Jenkintown, Pa., Professional Supply Co., 1956—1957, vii, 524 pp. (англ.)

В первой части книги приводятся для $n=0{,}0001\,(0{,}0001)\,1$ точные значения величины n^2, n^3, n^4, значения $n^{1/2}$ с десятью десятичными знаками, $n^{1/3}$ с девятью десятичными знаками, $n^{1/4}$ с восемью десятичными знаками до значения $n=0{,}2$; n^{-1} с семью десятичными знаками до значения $n=0{,}1$, а после этого значения с восемью десятичными знаками. Во второй части книги даны для $n=1\,(1)\,15000$ точные значения величин n^2, n^3, n^4, значения $n^{1/2}$ с восьмью десятичными знаками; $n^{1/3}$ с шестью десятичными знаками; $n^{1/4}$ с шестью десятичными знаками; n^{-1} с десятью десятичными знаками. Кроме того, для $n=15010\,(10)\,101000$ даны значения $n^{1/2}$ с семью десятичными знаками и $n^{1/4}$ с восемью десятичными знаками. В указанных двух частях книги на каждой странице вмещаются 50 значений величины n. Наконец, приводятся точные значения величины n^r для $r=5\,(1)\,10$, $n=1\,(1)\,100$ и для $n=11\,(1)\,20$, $n=1\,(1)\,10$. Таблицы напечатаны очень хорошо, особенно в первой части, где использован цветной шрифт. Значения корней даны с точностью до единицы последнего знака. В книге совсем отсутствует теоретический материал о построении и проверке таблиц. John Todd

Перевод из Math., Revs. 1957 18, № 10, 829

10 В340 К. Пятизначные логарифмы натуральных чисел и угловых функций для десятичного разбиения старых градусов. Küstner Herbert. Fünfstellige Logarithmen der natürlichen Zahlen und der Winkelfunktionen für dezimalgeteilten Altgrad. Anh.: Physikalisch-technische Tab. und math-Formeln. Unveränd. Nachdr. d. 7. erw. Aufl. Berlin, «Volk und Wissen», 1960, VI, 172 S., ill., 4.35 DM. «Dtsch. Nationalbibliogr.», 1960, A. № 43, 2926 (нем.)

10 В341 К. Двухсторонние таблицы равномерного деления окружности на части. Котельников Ф. Г. М., Машгиз, 1959, 271 стр., 13 р. 75 к.

10 В342 К. Интегралы от функции Эйри. Integrals of Airy functions. Nat. Bur. Standards. Appl. Math. Ser., 1958, № 52, 28 pp. (англ.)

Книга состоит из двух частей. Первая часть содержит значения функций

$$f(x)=\int_0^x \mathrm{Ai}(-t)\,dt, \qquad (1)$$

$$F(x)=\int_0^x f(t)\,dt \qquad (2)$$

при $x=-2\,(0{,}01)\,5$, где

$$\mathrm{Ai}(x)=\frac{1}{\pi}\int_0^\infty \cos\left(\frac{t^3}{3}+xt\right)dt$$

является решением уравнения

$$y''=xy. \qquad (3)$$

Всякое другое решение уравнения (3), ограниченное при $x\to\infty$, выражается через функцию $\mathrm{Ai}(x)$. Значения $f(x)$ приведены с восемью десятичными знаками, а значения $F(x)$ — с семью десятичными знаками. Таблицы составлены при помощи численного дифференцирования уравнения (3), контроль вычислений осуществлен при помощи разностей. В таблицах приводятся значения вторых центральных разностей. Вторая часть книги посвящена табулированию модифицированной функции Эйри

$$A_0(x)=\int_0^\infty e^{-xt-\frac{1}{3}t^3}\,dt,$$

являющейся решением дифференциального уравнения $y''+xy=1$, удовлетворяющего начальным условиям:

$$y(0)=3^{-2/3}\Gamma(1/3),\quad y'(0)=-3^{-1/3}\Gamma(2/3).$$

Приводятся значения функций $A_0(x)$ и $A_0'(x)$ и их вторых центральных разностей с восемью десятичными знаками при $x=0\,(0{,}01)\,1\,(0{,}02)\,5\,(0{,}05)\,11$. Имеется вспомогательная таблица, содержащая значения функций $A_0(x)$ и $-A_0'(x)$ с восемью десятичными знаками при $\frac{1}{x}=0{,}01\,(0{,}01)\,0{,}1$. В конце работы приводится вспомогательная таблица для функции $\int_0^x A_0(t)\,dt$ с восемью десятичными знаками при $x=0{,}5$ и при $x=1\,(1)\,11$. Вычисления проводились на машине SEAC при помощи численного решения дифференциального уравнения методом Рунге — Кутта. Дается довольно подробное теоретическое исследование вопроса (асимптотические формулы, ряды и т. п.). М. К. Керимов

10 В343 К. Таблицы функций Бесселя целого положительного индекса. Обработка таблиц и перев. с англ. Э. А. Чистовой. М., Вычисл. центр АН СССР, 1960, XXXI, 256 стр., 17 р. 75 к.

10 В344 К. Математические таблицы. Том. 4. Таблицы параболических цилиндрических функций Вебера и других функций для больших значений аргумента. Fox L. Mathematical tables. Vol. 4. Tables of Weber parabolic cylinder functions and other functions for large arguments. London, H. M. S. O., 1960, iii, 40 pp., ill., 12 sh. 6d. «Brit. Nat. Bibliogr.», 1961, № 576, 11 (англ.)

Том. 1, см. РЖМат, 1960, 8358К.

10 В345 К. Таблицы интегро-экспоненциальной функции $E_V(x)=\int_1^\infty e^{-xu}u^{-v}du$. Pagurova V. I. Tables of the exponential integral $E_V(x)=\int_1^\infty e^{-xu}u^{-v}du$. Transl from the Russ. Oxford—London—New York—Paris, Pergamon Press, 1961, xviii, 151 pp., 70 sh. (англ.)

Перевод с русск., см. РЖМат, 1960, 11011 К.

10 В346 К. Статистические таблицы. Czechowski T., Fisz M., Iwiński T., Lange O., Sadowski W., Zasępa R. Tablice statystyczne. Warsaw, P. W. N., 1957, 158 s., 32 zł. (польск.)

10 В347 К. Числовые карты для вычислений. Oishi Sanshiro. Numerical intersection charts for calculations. Tokyo, Univ. Management Administr. Instn, 1957, ii, 87 pp. (японск., англ.)

Эти карты предназначены для числовых расчетов, выполняемых не математиками. Здесь представлены: 1) таблица умножения для получения произведений ab при $a=100\,(1)\,1000$, $b=1\,(1)\,100$; 2) таблица значений n^2 для $n=0\,(1)\,999$; 3) таблица значений $\sqrt{n}$ при тех же значениях n. В первой таблице имеются произведения (расположенные на наклонной линии), облегчающие их

использование для получения квадратов, кубов, корней и обратных величин. J. Riordan

Перевод из Math. Revs, 1957, 18, № 10, 829.

10 В348 К. Таблицы перевода десятичных чисел в шестнадцатеричные и обратно. Fröberg Carl-Erik. Hexadecimal conversion tables. Dept Numer. Analysis, Lund Univ., Table, № 1, Lund, CWK Gleerup, 1957, 26 pp., 3 kr. (англ.)

Книга представляет собой полностью переработанное издание небольшой брошюры под тем же названием, впервые вышедшей в 1952 г. В первой части книги приводится таблица эквивалентов целых чисел

$$n = 1\,(1)\,1024\,(16)\,4096$$

и

$$n = 10^2(10^2)\,10^3(10^3)\,10^4 \ldots 10^{12}(10^{12})10^{13}$$

в шестнадцатеричной системе (т. е. с основанием 16). Во второй части даны шестнадцатеричные эквиваленты десятичных чисел $10^{-18}(10^{-18})\,10^{-16}(10^{-16})\,10^{-14}\ldots$ $\ldots 10^{-2}(10^{-2})\,1$; при этом ошибка не превышает 4 единиц последнего знака. Здесь шестнадцатеричное число состоит из 60 двоичных разрядов, объединенных в 15 шестнадцатеричных разрядов $(0, 1, \ldots, 9, A, B, \ldots, F)$; при этом первый двоичный разряд обозначает знак, а следующий двоичный разряд идет за двоичной запятой. В третьей части даны таблицы для обратного перевода десятичных чисел в шестнадцатеричные с плавающей запятой $z = x \cdot 2^y$, где $\frac{1}{2} \leqslant x < 1$, y — целое число. Фактически x дается в только что указанной стандартной форме и $y = 128 + y$ дается в виде двух шестнадцатеричных чисел; это означает, что интервал изменения простирается от 10^{-38} до 10^{+38}. Приводятся значения $z = n \cdot 10^{\pm k}$ для $k = 0(1)12$, $n = 1, 3, 7, 9$ и для $k = 13(1)25$, $n = 1$. В дополнение к стандартным представлениям для z приводятся еще три представления: $z = (x/2^i) \cdot 2^{y+i}$ $(i = 1, 2, 3)$. Эти представления часто используются при ручных вычислениях. В четвертой части книги содержится таблица констант, данных в прямой и шестнадцатеричной записи с плавающей запятой. В пятой части дается таблица перевода чисел из шестнадцатеричной системы в двадцатиразрядные десятичные числа для $z = n \cdot 16^{-k}$, когда $n = 0\,(1)\,F$, $k = 1\,(1)\,15$. Вторая, третья и пятая таблицы были вычислены на вычислительной машине Лундского университета (SMIL). Таблицы хорошо изданы. John Todd

Перевод из Math. Revs, 1957, 18, № 10, 829.

См. также: 10А100 К, 10Б35, 10Б38, 10Б39, 10Б91, 10Б290, 10Б392, 10В8, 10В49

ВЫЧИСЛИТЕЛЬНЫЕ МАШИНЫ И МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ПРИБОРЫ

Редактор *Д. Ю. Панов*

10 В349. АЛГОЛ — международный язык для описания логических и цифровых процессов. Naur Peter. Algol — det internationale sprog til at beskrive logiske og numeriske processer. «Nord. mat. tidskr.», 1960, 8, № 3, 117—129, 144 (датск., рез. англ.)

Краткое описание алгоритмического языка АЛГОЛ, иллюстрированное некоторыми примерами. Приводятся также коротко исторические предпосылки и возможность будущего развития языка. Резюме автора

10 В350. Блок-схемы программ. Paszkowski S., Wrona R. Schematy blokowe programów. «Zastosow. mat.», 1961, 5, № 4, 391—410 (польск.; рез. русск., англ.)

Рассматриваются основные понятия, связанные с вычислениями на автоматических цифровых машинах. Определены типы действий, из которых состоят вычисления, и способ соединения этих действий в программу. На этом основывается описание блок-схем программ. Определяется класс действий, выполняемых типичной цифровой машиной. Рассуждения опираются на введение четырех типов переменных. Значения порядковой переменной определяют порядок следования отдельных действий (операций), из которых составлена программа. Значения элементарных переменных являются основными объектами, которыми оперирует решаемая задача (числа, слова при переводе текста и т. д.). Значения адресных переменных являются адресами элементарных операционных, а также других адресных переменных. Значения операционных переменных являются операциями. Любая операция определяет новые значения некоторых элементарных, адресных и операционных переменных, а также адрес следующей операции.

Резюме автора

10 В351. Вычисление логарифма Непера и программирование для машины ИБМ-650. Marchetti Y., Mlle, Berthier P. Calcul et programmation du logarithme népérien sur I. B. M. 650. «Chiffres», 1960, 3, № 3, 143—148 (франц.; рез. англ., нем., русск.)

Рассматриваются два метода вычисления натуральных логарифмов и соответствующие программы для машины ИБМ-650. Резюме автора

10 В352. Действие и использование электронных вычислительных машин. Alfieri Leandro. Sul funzionamento e l'impiego delle calcolatrici elettroniche. «Elettrotecnica», 1961, 48, № 1, 17—26 (итал.)

Популярное описание элементов программирования.

10 В353. Обработка измерений при экспоненциальном эксперименте. Party J. Le dépouillement des mesures dans le cas de l'expérience exponentielle. «Codes Reactor computat». Vienna, 1961, 25—38. Discuss., 95—97 (франц.; рез. англ., русск., исп.)

Описание нескольких специальных программ для машин Zuse-22, связанных с экспериментальным исследованием атомных реакторов.

10 В354. Перевод псевдокодов на машинах, снабженных запоминающими устройствами с различной быстротой выборки. Duncan F. G., Hawkins E. N. Pseudo-code translation on multi-level storage machines. Informat. processing. Paris—München—London, 1960, 144—152 (англ.; рез. франц., нем., русск., исп.)

Многие из цифровых вычислительных машин снабжены запоминающими устройствами с различной быстротой выборки, причем наиболее обычной является следующая система: а) небольшое число регистров с очень быстрой выборкой, в том числе накапливающих и вычислительных регистров; б) довольно быстрое основное запоминающее устройство средней емкости, содержащее команды по выполнению программы; в) весьма емкое, постоянное запоминающее устройство с сравнительно медленной выборкой. Для целесообразного использования машины, снабженной запоминающими устройствами с различной быстротой выборки, необходимо обеспечить, чтобы данные, к которым приходится прибегать чаще всего, помещались в наиболее быстродействующих запоминающих устройствах и чтобы необходимость передачи информации из одного устройства в другое была сокращена до минимума. Эта задача возлагается обычно на программиста. Передача ее машине считалась до сих пор чрезвычайно трудной, хотя, конечно, весьма желательной. В докладе указывается путь к преодолению этих затруднений, ибо программисту дается воз-

можность составлять программу так, как если бы она предназначалась для машины с единым запоминающим устройством. Командный код для такой псевдовычислительной машины можно составлять с учетом определенной категории проблем или же можно использовать код той вычислительной машины, с которой программист уже знаком. Псевдопрограмма испытывается при помощи интерпретирующей программы обычного типа. Эта программа претворяется в фактическую программу, закодированную, согласно требованиям машины, при помощи особой программы перевода, основные черты которой излагаются. В этой связи следует отметить: а) метод анализа конфигурации программы, имеющей целью установить порядок очередности циклов и других частей программы; б) метод распределения адресов в запоминающих устройствах с наиболее быстрой выборкой, в соответствии с вышеуказанным порядком очередности и метод организации программных изменений в основном запоминающем устройстве; в) переход от псевдокода к машинному коду команд. Резюме авторов

10 В355. Дуальная система. Nürck R. Das Dualsystem. «Energiewirtsch. Tagesfragen», 1961, **10**, № 89—90, 287—290 (нем.)

Популярная статья.

10 В356. Некоторые аналогии между сложением и вычитанием в системах с основаниями +2 и —2. Majerski St. Niektóre analogie między dodawaniem i odejmowaniem w systemach o zasadach +2 i—2. «Biul. zakł. apar. mat. PAN», 1958, **P1**, № 4, 22—30 (польск.; рез. англ.)

Описывается метод сложения и вычитания двух чисел, представленных в виде

$$C = \sum_{k=0}^{m} c_k q^k, \text{ где } q = \pm 2;\ c_k = 0,1.$$

Приводится схема сумматора, способного производить сложение и вычитание двух относительных чисел с основанием $q=-2$ и сложение и вычитание (с условием, что результат будет положительный) двух положительных чисел в системе с основанием $q=+2$.

J. Jaworski

10 В357. Краткое описание машины «БЭСМ»-II (Основные параметры). Зак Л. А., Мильченко Т. И., Смирягин В. П. «Magyar tud. akad. Mat. kutató int. közl.», 1960, **A5**, № 1-2, 171—178 (рез. англ.)

10 В358. Запоминающее устройство с большой скоростью доступа для вычислительных машин. Baumann D. M. A high-scanning-rate storage device for computer applications «J. Assoc. Comput. Machinery», 1958, **5**, № 1, 76—88 (англ.)

Описывается устройство цифровой памяти. Цифровой материал хранится на фотопленке. Показано, что плотность записи может быть очень велика — $16 \cdot 10^6$ двоичных единиц информации на 100 $см^2$ пленки. Считывание производится рядом фотоэлементов с помощью многогранного вращающегося зеркала. Автор утверждает, что достижимы скорости считывания более 1 млн. слов в 1 сек. М. Д. Хахин

10 В359. Методы ускорения операций в цифровых машинах. Akushsky I. Y., Emelianov-Yaroslavsky L. B., Klyamko E. K., Linsky V. S., Monakhof G. D. Methods of speeding-up the operation of digital computers. Informat. processing. Paris—München—London, 1960, 382—388. Discuss. 388—389 (англ.; рез. франц., нем., русск., исп.)

Рассматриваются методы ускоренного выполнения некоторых базисных операций в цифровых машинах на основе использования цепей с более эффективными алгорифмами. Ускорение операций умножения по способу «цифра за цифрой» может быть достигнуто путем наложения операций сложения и сдвига или же методом «движущихся волн», посредством которого к общему результату добавляются различные частные производные. Для операции деления способом «цифра за цифрой» может быть использован метод, который в определенных случаях позволяет производить групповое введение в частное некоторого числа подобных цифр. В отдельных случаях операцию можно ускорить путем сосредоточения цифр в дополнительном порядке или отказываясь от нормализации последних. Рассматривается также возможность одновременного использования нескольких активных элементов исчисления, в связи с алгорифмами ускоренного выполнения умножения. Рассматривается возможность включения некоторых элементарных математических функций в список основных операций машины, а также даются алгорифмы для некоторых функций. Резюме автора

10 В360. Электроинтегратор для решения задач Дирихле и Неймана на полосе. Тозони О. В., Хлебников С. Д., Синельников Е. М., Колесников Э. В. «Изв. высш. учебн. заведений. Электромеханика», 1959, № 12, 18—25

10 В361. Вычисление корня n-й степени на двоичной вычислительной машине. Cazenave René. Calcul de la racine $n^{ème}$ d'un nombre sur une machine binaire. «Chiffres», 1960, **3**, № 3, 129—135 (франц.; рез. англ., нем., русск.)

Вычисляется корень n-й степени на двоичной машине с помощью решения уравнения $x^n - A = 0$ методом Ньютона. Резюме автора

10 В362. Аналоговый метод распознавания образов путем прослеживания границ. Sprick W., Ganzhorn K. An analogous method for pattern recognition by following the boundary. Informat. processing. Paris—München—London, 1960, 238—244. Discuss., 244 (англ.; рез. франц., нем., русск., исп.)

В докладе кратко излагаются идея, экспериментальная часть и результаты работы, которая была проделана в области распознавания цифр на протяжении последних нескольких лет. В докладе разбираются две модели экспериментального читающего устройства. Первая модель предназначена для опознавания печатных цифр высотой около 8 *мм* и толщиной 0,8—1,0 *мм*, имеющих максимально простую форму. Вторая оперирует с машинописными цифрами. Резюме авторов

10 В363. Распознавание букв через измерения потенциала поля. Kazmierczak H. The potential field as an aid to character recognition. «Informat. processing.» Paris—München—London, 1960, 244—247 (англ.; рез. франц., нем., русск., исп.)

Рассматривается фотоэлектрический метод автоматического опознавания букв на основе сигналов, источниками которых являются оптические контрасты. Промежуточной ступенью процесса опознавания букв является выяснение распределения потенциала плоскостного поля, в котором контур буквы представлен линией постоянного потенциала. Преимуществами этого метода являются хорошее опознавание форм, нечувствительность к дефектам и искажениям букв и легкость центровки букв. Одна из возможностей измерять потенциал поля и тем самым определять форму (т. е. букву) состоит в использовании устройства из сопротивлений и трансформаторов с сердечниками из феррита.

Резюме автора

10 В364. Некоторые проблемы моделирования цифровых систем. Conway R. W., Johnson B. M., Maxwell W. L. Some problems of digital systems simulation. «Manag. Sci.», 1959, **6**, № 1, 92—110 (англ.)

10 В365. О методах машинного перевода и их применение к переводу с английского на русский язык. Belskaya I. K. Machine translation methods and their application to an Anglo-Russian scheme. «Informat. processing». Paris—München—London, 1960, 199—217. Discuss., 217 (англ.; рез. франц., нем., русск., исп.)

Данный метод заключает три этапа: словарный анализ, грамматический анализ и грамматический синтез. Он был использован для переводов с английского, не-

мецкого, китайского, японского и русского языков, однако в настоящем сообщении речь идет лишь о переводе с английского на русский язык. Словарь состоит из 3000 английских и примерно такого числа русских слов и разделен на две части: однозначный словарь и многозначный словарь. Последний по объему составляет примерно одну пятую часть всего словаря. Для словарного анализа используются пять схем, из которых наибольшую важность представляет как в теоретическом, так и в практическом отношении схема анализа полисемии. Шесть схем служат для грамматического анализа, представляющего наибольшую важность в теоретическом отношении, поскольку он включает детальное описание структуры анализируемого языка. Схемы охватывают глаголы, знаки препинания, синтаксический анализ фразы, существительные и числительные, прилагательные и изменения порядка слов. Для грамматического синтеза имеются следующие четыре схемы: «словообразовательная», «глагол», «прилагательное», «существительное и числительное». Словарь и перечисленные выше схемы были подвергнуты экспериментальной проверке на машине БЭСМ (1956 г.), а также «вручную», с помощью десяти не знающих языка лаборантов. Переводилось около 100 отрывков из английских книг по прикладной математике, а также литературного характера. Полученные переводы были вполне понятны и не требовали последующего редактирования. Резюме автора

10 В366 К. Алгоритмы и машинное решение задач. 2 изд. Трахтенброт Б. А. М., Физматгиз, 1960, 119 стр., илл., 1 р. 85 к.

См. РЖМат, 1958, 2500.

10 В367 К. Импульсные и цифровые устройства. Миллман Я., Тауб Г. Перев. с англ. М.—Л., Госэнергоиздат, 1960, 416 стр., илл., 36 р. 80 к.

См. также: 10А29, 10В116, 10В131, 10В257, 10В278, 10 В285, 10 В299

АВТОРСКИЙ УКАЗАТЕЛЬ

(Перед номерами рефератов опущены номер и индекс 10 В выпуска)

А

Александров С. И. 264
Алексидзе М. А. 233
Ао Шо-чан 12

Б

Бартлетт М. С. 50 К
Бахвалов Н. С. 232, 263
Башарин Г. П. 80
Бухарин В. И. 236

В

Вайнштейн И. 308
Варшамов Р. Р. 159
Вертгейм Б. А. 244
Виноградова М. Б. 175
Волконский В. А. 33

Г

Гаек Я. 37
Геренрот Е. Л. 181
Гладышев Е. Г. 39
Гнеденко Б. В. 52
Гордеев А. В. 281
Гусев В. Д. 175

Д

Даниловская В. И. 236
Дерендяев И. М. 258
Джишкариани А. В. 223
Джоджуа А. К. 230
Драхлин Е. Х. 239

Е

Емельянов Г. В. 15
Ермилова Н. И. 330

З

Зайцева Н. 247
Зак Л. А. 357
Запольский Н. Н. 306

И

Иосикава Х. 294

К

Карновский М. И. 155
Кацкова О. Н. 314 К
Кивистик Л. 260
Кипоренко В. 109
Колесников Э. В. 360
Колмогоров А. Н. 52
Котельников Ф. Г. 341 К
Красовский А. А. 185
Красовский Р. Р. 174
Крейнес М. 308
Куликов Д. К. 226

Л

Ларченко Н. 247
Лащеников Б. Я. 271
Линковский Г. Б. 176—178
Лучка А. Ю. 256

М

Мак-Кинси Д. 144 К
Маруашвили Т. И. 238
Миллман Я. 367 К
Мильченко Т. И. 357
Мучник Г. Ф. 237

Н

Нагаев С. В. 24
Наумова И. Н. 314 К

О

Обморшев А. Н. 282
Остиану В. М. 160

П

Палкин В. К. 280
Прайсман Н. Я. 297, 298
Прохоров Ю. В. 52
Пустовойт С. П. 241

Р

Розанов Ю. А. 43
Рыбашов М. В. 257

С

Самарский А. А. 221
Сарманов О. В. 52
Сетунов Ф. 108
Синдлер Ю. Б. 178
Синельников Е. М. 360
Сифоров В. И. 176
Смирнова Н. С. 330
Смирягин В. П. 357
Стратонович Р. Л. 168

Т

Тауб Г. 367 К
Тихонов А. Н. 221
Тозони О. В. 360
Трахтенброт Б. А. 366 К
Тумашев Г. Г. 235

Ф

Файн В. С. 299
Фаддеев Д. К. 319 К
Фаддеева В. Н. 319 К
Флейшман Б. С. 176, 178

Х

Хлебников С. Д. 360
Хованский Г. С. 317 К, 318 К

Ц

Цхадая Ф. Г. 228, 229

Ч

Чайковский В. И. 180
Чекмарев Т. В. 309
Чернышов Ю. 108

Ш

Шаркова Н. В. 220, 222
Шарковский А. Н. 261
Шмыглевский Ю. Д. 314 К
Шулишнина Н. П. 314 К

Я

Ян Цзун-пань 12

A

Aggarwal O. P. 323
Ajne B. 269
Akaike H. 14
Akao Y. 193
Aki K. 165
Akushsky I. Y. 359
Alfieri L. 352
Aoki M. 122
Arden D. N. 110
Armitage P. 199
Avondo Bodino G. 146 K

B

Badrikian A. 97
Banerjee K. S. 126
Barakat R. 276
Barrett W. 266
Bartlett M. S. 201
Bartsch G. E. 199
Basmann R. L. 73
Baumann D. M. 358
Beatty G. H. 90
Bedenić B. 56
Békéssy A. 153
Béla J. 255
Bellman R. 120, 203
Belskaya I. K. 365
Benjamin S. 128
Bennett B. M. 211
Berthier P. 351
Blake J. P. H. 270
Blum M. 167
Bodiou G. 3
Brunk H. D. 58, 75
Burch N. R. 182
Burunova N. M. 333 K

C

Campbell E. S. 328
Capon J. 179
Cazenave R. 361
Cecconi J. 4
Chambers J. C. 68
Champernowne D. G. 69
Chanda K. C. 94
Chao F. h. 259
Cheney E. W. 107
Chiang C. L. 205
Chiassino G. 127
Cohen A. C., Jr. 87
Cohen L. 96
Coleman D. 252
Colliva R. 163
Conway R. W. 364
Corrington M. S. 275
Csáki P. 7
Czechowski T. 346 K

D

Dalenius T. 269
Dantzig G. B. 113
Darroch J. N. 64
David H. A. 187
Dolby J. L. 303
Doob J. L. 29, 35

Dorn W. S. 118
Dreyfus S. E. 133
Duncan F. G. 354

E

Eckert W. J. 225
Egerváry E. 246
Eisner R. 124
Emelianov Yaroslavsky L. B. 359
Epstein B. 91, 190, 191
Eselson L. 116

F

Feinleib M. 204
Feller W. 20, 34
Ferreri C. 6
Fidelis E. 70
Fischer J. 7
Fishbach E. M. 328
Fisz M. 36, 346 K
Fox L. 321, 344 K
Francia G. 293
Franklin J. N. 121
Freitas A. C. 245
Friend J. K. 141
Fröberg C.-E. 348 K
Fulda S. 292
Fulkerson D. R. 112
Furukawa N. 198

G

Gaede K.-W. 9, 10
Ganzhorn K. 362
Geißler S. 106
Gersch W. 172
Gibbons A. 224
Gilard J. 234
Gilbert E. N. 161
Gill A. 284
Gispert H.-G. 243
Gittelsohn A. M. 212
Gjeddebaek N. F. 82
Glicksman S. 116
Gluss B. 142, 143
Goldberger S. 147 K
Goldstein A. A. 107, 274
Goldstine H. H. 254
Good I. J. 32
Goodman L. A. 79
Goodstein R. L. 304
Gordon R. 189
Gorman W. M. 125
Gower J. C. 201, 202
Green D. M. 217
Greenberg B. G. 251
Grenander U. 48
Guttman I. 323
Gyires B. 16

H

Haidmann M. 195
Hájek J. 17
Hajnal J. 25
Hannan J. 83
Hanuška A. 240
Harkink F. 315 K
Hartley H. O. 71
Havlín V. 138
Hawkins E. N. 354
Henze E. 51
Hereshoff J. B. 274
Hickerson T. F. 301
Hilton A. M. 1
Hirschfelder J. O. 328
Hochsteiner O. 325
Hoel P. G. 74
Hof H. 339 K
Hogg R. V. 61, 85
Holberg K. 324
Horwitz L. P. 254
Householder A. S. 248
Hsieh H. C. 184

I

Ikeda S. 157
Isbell J. R. 100, 101
Iwiński T. 346 K

J

Jacobson M. J. 173
Jambunathan M. V. 60
James A. T. 62
Jaynes E. T. 162
Jeffreys H. 86
Jensen J. R. 324
Jílek M. 84, 88
Johnson B. M. 364
Johnson L. 116

K

Kac M. 19
Kalaba R. 114, 203
Kapur M. N. 89
Karlin S. 13, 28, 30, 145
Kazmierczak H. 363
Kelley J. E., Jr. 104
Kellogg R. B. 250
Kendall D. G. 31
Kerner H. 136
Kiefer J. 290
Kimbro G. M. 296, 331
Kloek T. 76
Klyamko L. K. 359
Kogbetliantz E. G. 278
Kondo J. 45
Koschemann O. 336 K
Kotzig A. 18
Krzywoblocki M. Z. 149
Kudô A. 198
Kunze G. 305
Küstner H. 340 K

L

Lamperti J. 123
Lange O. 346 K
Langer R. E., Ed. 316 K
Lehmann E. L. 92, 93
Lehmer D. H. 285
Lehti R. 249
Leipnik R. 169
Leondes C. T. 184
Leslie P. H. 201, 202
Lesourne J. 134
Levin M. J. 164, 170
Levine J. 326
Levine N. 274
Levinson L. 207
Lévy P. 5
Likař O. 84, 88
Linsky V. S. 359
Löffelbein K. 148 K
Loh S. C. 329
Longman I. M. 265
Love E. R. 277

M

McGregor J. 28, 30
McFadden J. A. 166
McKey M. J. 217
Majerski St. 356
Malecot G. 208
Maradudin A. A. 322
Marchetti Y. 351
Masani P. 44, 47
Massé P. 2
Matthys G. 105, 115
Matuszewski T. I. 132
Maxwell W. L. 364
Medgyessy P. 11
Mennes L. B. M. 76
Meurer H. 288
Mills H. 98
Monakhof G. D. 359
Moore E. F. 161
Morrison D. F. 187
Motinori G. 242

N

Naur P. 349
Neyman J. 72
Niederjohn J. A. 117
Nisio M. 40
Noderer L. C. 250
Noether G. E. 78
Nürck R. 355

O

Oesterle K. M. 196
Ogawara M. 46
Oishi S. 347 K
Oliver y Trujillo A. 111
Onoyama T. 41

P

Pagurova V. I. 345 K
Parker R. V. 283
Paszkowski S. 350
Patry J. 353
Pearcey T. 337 K
Pearson E. S. 55
Penndorf R. B. 332 K
Penning P. 151
Picinbono B. 21
Piehler J. 140
Pitcher T. S. 38
Potthoff G. 119
Proschan F. 13
Pütter P. S. 289

Q

Quensel C. E. 59

R

Rajagopalan M. 209
Reutter F. 311—313
Rigal J.-L. 253
Riggi O'Dwyer G. 54
Robbins H. M. 183
Robson D. S. 206
Roe G. M. 291
Rogers J. 137
Ross A. S. C. 103
Rotenberg A. 295
Rottmann K. 335 K
Rybarski A. 227

S

Sadowski W. 346 K
Sakaguchi M. 95
Salah E. A. Elmaghraby 135
Salton G. 8
Saltzberg B. 182
Salzer H. E. 296, 327, 331
Sanchez-Monge E. 213
Sarason H. M. 207
Sarhan A. E. 251
Sarkadi K. 194
Sauer R. 302
Savage I. R. 63
Schmetterer L. 49, 186
Schneider E. 129
Schönbacher K. 286
Schutzenberger M. P. 67
Schwartz L. 210
Schwartz L. S. 1
Scott E. L. 72
Seal K. C. 214
Segerdahl C.-O. 218
Shannon C. E. 158
Shenton L. R. 22
Sherry M. E. 292
Shipley E. F. 216, 217
Shipley R. B. 252
Shklov N. 267
Shubik M. 99
Shu-Chuang 131
Sindelář V. 154
Singh D. 320
Skellam J. G. 22
Smith W. L. 152
Sprick W. 362
Srivastava J. N. 200
Stein P. 268
Stěpánský V. 310
Stone H. 273
Suppes P. 123
Swets J. A. 217

T

Takács L. 26, 27
Thacher H. C., Jr. 272
Thirion R. 287
Ting Kuan 131
Tortrat A. 23
Tukey J. W. 53, 156
Turner M. E. 77

U

Uhlhorn U. 150
Urbanik K. 42
Urkowitz H. 171

V

Vadovič F. 231

W

Wearden S. 210, 215
Wegmüller W. 65
Weiss G. H. 322
Weiss L. 81
Weissberg A. 90
Wesler O. 102
Wiener N. 47
Wijsman R. A. 66
Wilks S. S. 57
Winter B. B. 188
Wöhr F. 197
Wojtowicz J. 307
Wrench J. W. Jr 279
Wright E. M. 262
Wrona R. 350

Z

Zaludová A. H. 192
Zasepa R. 346 K
Zieliński R. 70

РЕФЕРАТИВНЫЙ ЖУРНАЛ

ИНСТИТУТА НАУЧНОЙ ИНФОРМАЦИИ АКАДЕМИИ НАУК СССР

ДИРЕКТОР ИНСТИТУТА профессор *А. И. Михайлов*

Реферативный журнал издается в следующих сериях:

АВТОМАТИКА И РАДИОЭЛЕКТРОНИКА — Главный редактор канд. техн. наук *А. С. Бучинский*, АСТРОНОМИЯ И ГЕОДЕЗИЯ — Главный редактор профессор *К. Ф. Огородников*, БИОЛОГИЯ — Главный редактор канд. биол. наук *В. П. Доброхвалов*, ГЕОГРАФИЯ — Главный редактор доктор геогр. наук *А. А. Насимович*, ГЕОЛОГИЯ — Главный редактор профессор *Е. Е. Захаров*, ГЕОФИЗИКА — Главный редактор профессор *И. А. Хвостиков*, ГОРНОЕ ДЕЛО — Главный редактор докт. техн. наук *Е. М. Фаерман*, МАТЕМАТИКА — Главный редактор доктор физ.-мат. наук *Р. В. Гамкрелидзе*, МАШИНОСТРОЕНИЕ — Главный редактор профессор *Ф. С. Демьянюк*, МЕТАЛЛУРГИЯ — Главный редактор член-корреспондент АН СССР *Н. В. Агеев*, МЕХАНИКА — Главный редактор академик АН СССР *Л. И. Седов*, ТРАНСПОРТ — Главный редактор канд. техн. наук *В. Т. Осипов*, ФИЗИКА — Главный редактор профессор *Э. В. Шпольский*, ХИМИЯ — Заведующий отделом профессор *В. В. Кафаров*, ЭКОНОМИКА ПРОМЫШЛЕННОСТИ — Главный редактор профессор *С. М. Лисичкин*, ЭЛЕКТРОТЕХНИКА И ЭНЕРГЕТИКА — Главный редактор профессор *Б. М. Тареев*

СОДЕРЖАНИЕ

СВОДНОГО ТОМА РЖ «МАТЕМАТИКА» № 10 за 1961 г.

10 А. Общие вопросы 10А1
История математики. Персоналия . . . 10А43
Преподавание математики 10А90
Основания математики и математическая логика 10А113
Теория чисел 10А128
Алгебра 10А160
Многочлены и линейная алгебра . . . 10А164
Группы 10А186
Поля, кольца, алгебры и структуры . . 10А228
Алгебраическая теория схем связи и управления 10А283
Топология 10А303
Геометрия 10А348
Приложения геометрии 10А349
Элементарная геометрия 10А355
Аналитическая геометрия 10А371
Проективная и неевклидовы геометрии 10А375
Начертательная геометрия 10А390
Алгебраическая геометрия 10А396
Дифференциальная геометрия трехмерного пространства 10А443
Геометрия n-мерного пространства . . . 10А454
Теория относительности 10А471
Глобальная теория дифференцируемых многообразий 10А489
Метрические методы в геометрии . . . —
Выпуклые многообразия . . . . . —
Авторский указатель
10 Б. Теория функций действительного переменного 10Б1
Теория множеств . . . . . —
Приближение функций полиномами и их обобщениями 10Б24
Теория функций комплексного переменного 10Б40
Дифференциальные уравнения
Обыкновенные дифференциальные уравнения 10Б86
Уравнения в частных производных . . . 10Б150
Приложения к физике, технике и естественным наукам 10Б218
Интегральные уравнения 10Б307
Вариационное исчисление 10Б324
Анализ (другие вопросы) 10Б339
Числовые ряды 10Б361
Специальные функции 10Б379
Интегральные преобразования и операционное исчисление 10Б391
Приложения общих методов математического анализа 10Б404
Функциональный анализ 10Б409
Авторский указатель
10 В. Теория вероятностей и математическая статистика
Теория вероятностей 10В1
Математическая статистика 10В52
Теория игр, исследование операций и математическая экономика 10В98
Применение теоретико-вероятностных и статистических методов 10В149
Численные и графические методы . . . 10В220
Таблицы 10В320
Вычислительные машины и математические приборы 10В349
Применение вычислительных машин . . —
Авторский указатель

П.ЯЩ. 1598
ТЕХ. БИБЛИОТЕКА

Цена 38 к.
24 к. для индивидуальных подписчиков

ОТКРЫТА ПОДПИСКА

НА РЕФЕРАТИВНЫЙ ЖУРНАЛ АКАДЕМИИ НАУК СССР

МАТЕМАТИКА

на 1962 год

ПОДПИСНАЯ ЦЕНА ДЛЯ ИНДИВИДУАЛЬНЫХ ПОДПИСЧИКОВ

на сводный том и выпуски сводного тома

СНИЖЕНА до 25%

Журнал рассчитан на широкий круг математиков и лиц, работающих в смежных с математикой областях науки и техники, и дает информацию об опубликованных в мировой литературе научных работах по всем разделам математики и многим ее приложениям.

К годовому комплекту сводного тома будут изданы авторский и систематическо-предметный указатели.

Для удобства читателей часть тиража сводного тома издается в виде трех выпусков.

Подписка принимается с любого очередного номера.

Условия подписки:

СВОДНЫЙ ТОМ	Для организаций	Для индивид. подписчиков
На год (за 12 номеров с указателями) . . .	30-40	19 00
На 6 мес. (за 6 номеров без указателей) . . .	12-96	8-10

ВЫПУСКИ СВОДНОГО ТОМА без указателей	Для организаций		Для индивид. подписчиков	
	на год	на 6 мес.	на год	на 6 мес
1. МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ЛОГИКА. ТЕОРИЯ ЧИСЕЛ. АЛГЕБРА. ТОПОЛОГИЯ. ГЕОМЕТРИЯ	9-36	4-68	5-88	2-94
2. АНАЛИЗ	10-80	5-40	6-72	3-36
3. ТЕОРИЯ ВЕРОЯТНОСТЕЙ И МАТЕМАТИЧЕСКАЯ СТАТИСТИКА. ЧИСЛЕННЫЕ МЕТОДЫ. КИБЕРНЕТИКА	5-76	2-88	3-60	1-80

Подписка принимается без ограничения в пунктах подписки «Союзпечать», почтамтах, конторах и отделениях связи, общественными уполномоченными на заводах, фабриках и шахтах, в учебных заведениях и учреждениях.

Заказы можно направлять также в Отдел подписки и реализации Производственно-издательского комбината ВИНИТИ по адресу:

г. Москва, Люберцы-6, Октябрьский проспект, 403
Р/сч. 58526 в Люберецком отделении Госбанка г. Москвы